

Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues (par morceaux) convergeant simplement sur I vers une fonction f , c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$: convergence point par point.

On suppose que f est continue (par morceaux) et que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_I |f_n|$ converge.

Alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable et $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Remarque : Pour prouver la continuité de f , on doit parfois utiliser la convergence uniforme sur tout segment.

Exemple : On a $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. L'application $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0, 1]$.

En effet, on a $\forall t \in [0, 1]$, $\frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n}$, et comme $\int_0^1 \frac{t^n}{n} dt = \frac{1}{n^2}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{n} dt$ converge.

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque : De façon générale, si les fonctions continues par morceaux f_n sont positives et si $\sum f_n$ converge vers une fonction continue (par morceaux) et intégrable f , alors $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Variante : On a $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sinh t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2te^{-t}}{1 - e^{-2t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-(2n+1)t} dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$.

Exemple : Montrons que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ converge sur $[0, 1[$ vers $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et f est bien continue.

En revanche, ici on ne peut pas appliquer directement le théorème ITT car $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n} dx = +\infty$.

Pour se ramener au cas du b), on pourrait regrouper les termes deux par deux.

Remarque : En fait, ici, il vaut mieux utiliser le théorème sur les séries entières :

En effet, la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ est définie sur $] -1, 1]$ et continue sur $] -1, 1]$.

Or, pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$:

On procède en effet par intégration de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ qui converge normalement sur $[0, x]$.

Donc par continuité, $f(1) = \arctan(1)$.

Théorème de convergence dominée pour les suites d'intégrales

1) Théorème de convergence dominée

Prop : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues (par morceaux) et intégrables sur I .

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue (par morceaux).

On suppose qu'il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et dominant $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$.

Alors f est intégrable sur I , et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$.

IMPORTANT : Il suffit que la propriété de domination soit vraie pour n assez grand.

Exemple : On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{1-1/n}} dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

En effet, on a $\forall t \in]0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{1-1/n}} = \frac{\ln(1+t)}{t}$, et $\frac{\ln(1+t)}{t^{1-1/n}} \leq \frac{\ln(1+t)}{t}$ intégrable sur $]0, 1]$.

Exemple : Supposons que I est un segment. Pour que l'hypothèse de domination soit vérifiée, il suffit que les f_n soient uniformément bornées (c'est-à-dire qu'il existe M indépendant de n tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup |f_n| \leq M$).

Exemple : On a $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Montrons que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons les fonctions continues $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$

Pour tout $t > 0$, on a $f_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ pour n assez grand, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1} e^{-t} = f(t)$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall t \in]0, +\infty[$, $f_n(t) \leq t^{x-1} e^{-t} = f(t)$, car $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

La fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f$, d'où le résultat.

Remarque : $\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du = \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$.

On en déduit la formule classique $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$.

Par exemple, $\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \dots (n - \frac{1}{2}) \sim n! \sqrt{\pi n}$, car $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2) Intégrales dépendant d'un paramètre continu

On considère $g(x) = \int_I f(x, t) dt$, avec $x \in A$ et $\forall t \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ intégrable.

On cherche la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers a (où a est adhérent à A).

Rappel : *Caractérisation séquentielle des limites :* Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ adhérent à I .

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = L$.

Exemple : Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

On considère $\forall x > 0$, $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx} dt$. Pour tout $x > 0$, l'intégrale existe car $f(t) e^{-tx} = O_{+\infty}(e^{-tx})$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$ en utilisant la caractérisation séquentielle.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. Posons $I_n = L(x_n) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx_n} dt$.

On a $\forall t$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t) e^{-tx_n} = 0$.

D'autre part, pour n assez grand, on a $x_n \geq 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(t) e^{-tx_n}| \leq K e^{-t} = \varphi(t)$, avec $K = \sup |f|$.

L'application φ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc par le théorème de cv dominée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} L(x_n) = \int_0^{+\infty} 0 = 0$.

Comme la limite est vraie pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$.

Exemple culturel : *Théorème de Cesàro* (pour les fonctions, preuve non classique ...).

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = L$.

En effet, $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(tx) dt$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(tx) = L$ et $f(tx) \leq L$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(tx) dt = \int_0^1 L dt = L$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

1) Convergence dominée appliquée aux intégrales dont le paramètre est continu

Prop : Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R} (x, t) \mapsto f(x, t)$ et a adhérent à A . On suppose :

- que f est continue par morceaux par rapport à t : Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I
- que pour tout $t \in I$, il existe $\lambda(t) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, t)$, et que $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux
- qu'il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de *domination uniforme*)

Alors, les applications $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \lambda(t)$ sont intégrables, et $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \lambda(t) dt}$.

Preuve : Il s'agit de prouver que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a dans A , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f(x_n, t) dt = \int_I \lambda(t) dt$.

Pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fixée, on applique le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $f_n(t) = f(x_n, t)$.

IMPORTANT : Il suffit que l'hypothèse de domination uniforme soit vraie au voisinage de a , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in (V \cap A), (\forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t))$.

2) Continuité des intégrales par rapport au paramètre

Prop : Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R} (x, t) \mapsto f(x, t)$. On suppose :

- que f est continue par morceaux par rapport à t : Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I
- que f est continue par rapport à x : Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A
- qu'il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable telle que $\forall x \in A, (\forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t))$.

Alors, pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable, et l'application $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Remarque : Si f est continue sur $A \times I$, les deux premières hypothèses sont immédiatement vérifiées.

IMPORTANT : La continuité étant une notion locale, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination localement,

c'est-à-dire qu'il suffit de prouver que la propriété de domination est vérifiée au voisinage de tout $x \in A$. Par exemple, il suffit de vérifier que pour tout segment $[a, b]$ de A , il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable (dépendant souvent de a et b) telle que $\forall x \in [a, b], (\forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t))$.

Exemple : Soit $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et bornée. On pose $\forall x > 0, L(x) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-tx} dt$.

Alors L est continue sur $]0, +\infty[$. On va prouver l'hypothèse de domination sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$, avec $\alpha > 0$.

En effet, on a $\forall x \in [\alpha, +\infty[, \forall t \geq 0, |h(t)e^{-tx}| \leq Me^{-t\alpha} = \varphi(t)$, où $M = \sup_{[0, +\infty[} |h|$.

Comme φ est intégrable, la restriction de L à $[\alpha, +\infty[$ est continue (donc L continue en tout point $x \in]\alpha, +\infty[$).

Comme $\alpha > 0$ est arbitraire, on en déduit que L est continue en tout point $x > 0$, c'est-à-dire continue sur $]0, +\infty[$.

3) Dérivation des intégrales par rapport au paramètre (dérivation sous le signe somme)

a) *Prop* : Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R} (x, t) \mapsto f(x, t)$. On suppose :

- que pour tout $x \in A$, les applications $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I

- que pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur A (c'est-à-dire $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ continue)

- qu'il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall x \in A, \left(\forall t \in I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \right)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur A , et $\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ (formule de Leibniz).

IMPORTANT : Il suffit que la propriété de domination uniforme soit vraie au voisinage de tout point $x \in A$, donc il suffit de trouver une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ dominant uniformément $t \mapsto f(x, t)$ par rapport à x sur chaque segment de A .

Remarque : En fait, l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sur I résulte de la propriété de domination, donc pourrait être supprimée dans la première hypothèse.

b) *Prop (extension aux fonctions de classe C^n) :* Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R} (x, t) \mapsto f(x, t)$. On suppose :

- que pour tous $x \in A$ et $0 \leq k < n$, les applications $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ sont intégrables sur I .

- que pour tout $t \in I$, pour tous $0 \leq j < k$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^n sur A .

- que $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est continue par morceaux et il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \left(\forall t \in I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \right)$$

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^n , et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in A, g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$.

Remarques :

- L'hypothèse de domination uniforme porte sur la dernière dérivée $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$.

- L'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^n sur A , d'où l'existence et la continuité des $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$.

c) *Prop (extension aux fonctions de classe C^∞) :* Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R} (x, t) \mapsto f(x, t)$. On suppose :

- que pour tous $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, les applications $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ sont intégrables sur I .

- que pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^∞ sur A .

- que pour n assez grand, il existe $\varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall x \in A, \left(\forall t \in I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_n(t) \right)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^∞ , et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, g^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt$.

Exemple : La fonction Γ , définie par $\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

On considère ici $\forall x > 0, \forall t > 0, f(x, t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1) \ln t} e^{-t}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$. Les fonctions $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ sont continues sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. On considère $\varphi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi_n(t) = \begin{cases} |\ln t|^n t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^n t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \forall t > 0 \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_n(t)$, et les φ_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

Donc Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt$.

4) Cas des intégrales paramétrées de fonctions définies sur un segment

Rappel : Toute fonction continue sur un compact (de $\mathbb{R}^2$) est bornée et atteint ses bornes.

a) On considère le cas où I est un segment et où $f : A \times I \rightarrow (x, t) \rightarrow f(x, t)$ est de classe C^n sur $A \times I$.

Dans ce cas, l'hypothèse de domination sur $K \times I$ est évidente pour tout segment K de A : il suffit en effet de considérer la borne supérieure des $|f(x, t)|$ où (x, t) décrit le compact $K \times I$, et plus généralement la borne supérieure de $\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|$ sur le compact $K \times I$ (en supposant par exemple f de classe C^n sur $A \times I$). D'où :

Prop : Soit I est un segment et $f : A \times I \rightarrow (x, t) \rightarrow f(x, t)$ de classe C^n sur $A \times I$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^n sur A , et pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $\forall x \in A, g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$.

Remarque : L'énoncé n'étant pas au programme, donc il faut refaire la preuve à chaque fois.

Pour tout segment K de A , $K \times I$ est compact, et on peut donc considérer donc $\varphi_k(t) = \sup_{(x,t) \in K \times I} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right|$.

b) *Exemple* : Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Considérons $\forall x \geq 0, g(x) = \int_0^1 f(tx) dt$.

La fonction $h : (t, x) \mapsto f(tx)$ est de classe C^∞ sur $[0, 1] \times [0, +\infty[$.

A fortiori, les deux premières hypothèses du 2) c) sont vérifiées.

D'autre part, on a $\forall x \in [a, b], \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) = t^n f^{(n)}(tx)$.

Donc pour tout segment $[a, b]$ de $[0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \sup_{(x,t) \in [a,b] \times [0,1]} |t^n f^{(n)}(tx)| = \varphi_n(t)$.

La borne sup existe car $[a, b] \times [0, 1]$ est compact et que toute fonction continue sur un compact est bornée.

L'application φ_n est intégrable car toute fonction continue est intégrable sur un segment.

Donc l'application f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n f^{(n)}(tx) dt$.