$\boxed{\text{Intégrales dépendant d'un paramètre}}$

1) Convergence dominée appliquée aux intégrales dont le paramètre est continu

Prop : Soit $f : A \times I \to \mathbb{R}$ $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ et a adhérent à A. On suppose :

- que f est continue par morceaux par rapport à t : Pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I

- que pour tout $t \in I$, il existe $\lambda(t) = \lim_{x\to a} f(x,t)$, et que $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux

- qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de *domination uniforme*)

Alors, les applications $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \lambda(t)$ sont intégrables, et $\boxed{\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\ dt = \int_I \lambda(t)\ dt}$.

Preuve : Il s'agit de prouver que pour *toute* suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a dans A, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_I f(x_n,t)\ dt = \int_I \lambda(t)dt$.

Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fixée, on applique le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n(t) = f(x_n,t)$.

$\boxed{\text{Important : Il suffit que l'hypothèse de domination uniforme soit vraie au voisinage de } a}$, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in (V \cap A)$, $(\forall t \in I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t))$.

2) Continuité des intégrales par rapport au paramètre

Prop : Soit $f : A \times I \to \mathbb{R}$ $(x,t) \longmapsto f(x,t)$. On suppose :

- que f est continue par morceaux par rapport à t : Pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I

- que f est continue par rapport à x : Pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A

- qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application intégrable telle que $\forall x \in A,\ (\forall t \in I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t))$.

Alors, pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable, et $\boxed{\text{l'application } x \longmapsto \int_I f(x,t)\ dt \text{ est définie et continue sur } A}$.

Remarque : Si f est continue sur $A \times I$, les deux premières hypothèses sont immédiatement vérifiées.

$\boxed{\text{Important : La continuité étant une notion locale, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination localement}}$, c'est-à-dire qu'il suffit de prouver que la propriété de domination est vérifiée au voisinage de tout $x \in A$. Par exemple, il suffit de vérifier que pour *tout* segment $[a,b]$ de A, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable (dépendant souvent de a et b) telle que $\forall x \in [a,b]$, $(\forall t \in I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t))$.

Exemple : Soit $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et bornée. On pose $\forall x > 0$, $L(x) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-tx}\ dt$.

Alors L est continue sur $]0,+\infty[$. On va prouver l'hypothèse de domination sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$, avec $\alpha > 0$.

En effet, on a $\forall x \in [\alpha,+\infty[$, $\forall t \geq 0$, $|h(t)e^{-tx}| \leq Me^{-t\alpha} = \varphi(t)$, où $M = \sup_{[0,+\infty[} |h|$.

Comme φ est intégrable, la restriction de L à $[\alpha,+\infty[$ est continue (donc L continue en tout point $x \in]\alpha,+\infty[$).

Comme $\alpha > 0$ est arbitraire, on en déduit que L est continue en tout point $x > 0$, c'est-à-dire continue sur $]0,+\infty[$

3) Dérivation des intégrales par rapport au paramètre (dérivation sous le signe somme)

a) *Prop* : Soit $f : A \times I \to \mathbb{R}$ $(x,t) \longmapsto f(x,t)$. On suppose :

- que pour tout $x \in A$, les applications $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I

- que pour tout $t \in I$, l'application $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur A (c'est-à-dire $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue)

- qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\boxed{\forall x \in A,\ \left(\forall t \in I,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)\right)}$.

$\boxed{\text{Alors } g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\ dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } A, \text{ et } \forall x \in A,\ g'(x) = \int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt}$ (formule de Leibniz).

$\boxed{\text{IMPORTANT : Il suffit que la propriété de domination uniforme soit vraie au voisinage de tout point } x \in A}$, donc il suffit de trouver une fonction $t \longmapsto \varphi(t)$ dominant uniformément $t \longmapsto f(x,t)$ par rapport à x sur chaque segment de A.

Remarque : En fait, l'intégrabilité de $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur I résulte de la propriété de domination, donc pourrait être supprimée dans la première hypothèse.

b) *Prop* (*extension aux fonctions de classe* C^n) : Soit $f : A \times I \to \mathbb{R}$ $(x,t) \longmapsto f(x,t)$. On suppose :

- que pour tout $t \in I$, l'application $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^n sur A.

- que pour tout $x \in A$ et pour tout $0 \leq k < n$, les applications $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont intégrables sur I.

- que $t \longmapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux et il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A,\ \left(\forall t \in I,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \varphi(t)\right)$$

$$\boxed{\text{Alors } g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\ dt \text{ est de classe } C^n, \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in A,\ g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\ dt.}$$

Remarques :

- L'hypothèse de domination uniforme porte uniquement sur la dernière dérivée partielle $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$.

- L'application $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^n sur A, d'où l'existence et la continuité des $x \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$.

c) *Prop* (*extension aux fonctions de classe* C^∞) : Soit $f : A \times I \to \mathbb{R}$ $(x,t) \longmapsto f(x,t)$. On suppose :

- que pour tout $t \in I$, l'application $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur A.

- que pour tous $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, les applications $t \longmapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ sont intégrables sur I.

- que pour n assez grand, il existe $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall x \in A,\ \left(\forall t \in I,\ \left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \varphi_n(t)\right)$.

$$\boxed{\text{Alors } g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\ dt \text{ est de classe } C^\infty, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ g^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\ dt.}$$

Exemple : La fonction Γ, définie par $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

On considère ici $\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ f(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}$. Les fonctions $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ sont continues sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. On considère $\varphi_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $\varphi_n(t) = \begin{cases} |\ln t|^n\, t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t < 1 \\ (\ln t)^n t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \forall t > 0\ \left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \varphi_n(t)$, et les φ_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

Donc Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty}(\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}dt$.

4) Cas des intégrales paramétrées de fonctions définies sur un segment (*hors-programme*)

Rappel : Toute fonction continue sur un compact (de $\mathbb{R}^2$) est bornée et atteint ses bornes.

a) On considère $\boxed{\text{le cas où } I \text{ est un segment}}$ et où $f : A \times I \to (x,t) \to f(x,t)$ est de classe C^n sur $A \times I$.

Dans ce cas, l'hypothèse de domination sur $K \times I$ est évidente pour tout segment K de A : il suffit en effet de considérer la borne supérieure des $|f(x,t)|$ où (x,t) décrit le compact $K \times I$, et plus généralement la borne supérieure de $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|$ sur le compact $K \times I$ (en supposant par exemple f de classe C^n sur $A \times I$). D'où :

Prop : Soit I est un segment et $f : A \times I \to (x,t) \to f(x,t)$ de classe C^n sur $A \times I$.

Alors $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\ dt$ est de classe C^n sur A, et pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $\forall x \in A,\ g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\ dt$.

Remarque : L'énoncé n'étant pas au programme, donc il faut refaire la preuve à chaque fois.

Pour tout segment K de A, $K \times I$ est compact, et on peut donc considérer donc $\varphi_k(t) = \sup_{(x,t)\in K\times I}\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right|$.

b) *Exemple* : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Considérons $\forall x \geq 0,\ g(x) = \int_0^1 f(tx)\ dt$.

La fonction $h : (t,x) \longmapsto f(tx)$ est de classe C^∞ sur $[0,1] \times [0,+\infty[$.

A fortiori, les deux premières hypothèses du 2) c) sont vérifiées.

D'autre part, on a $\forall x \in [a,b],\ \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = t^n f^{(n+1)}$.

Donc pour tout segment $[a,b]$ de $[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \sup_{(x,t)\in[a,b]\times[0,1]}\left|t^n f^{(n)}(tx)\right| = \varphi_n(t)$.

La borne sup existe car $[a,b] \times [0,1]$ est compact et que toute fonction continue sur un compact est bornée.

L'application φ_n est intégrable car toute fonction constante est intégrable sur un segment.

Donc l'application f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$, et on a $\forall n \in \mathbb{N},\ g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n f^{(n)}(tx)\ dt$.