Intégration d'une suite et d'une série de fonctions : ITT et convergence dominée

1) Théorème de convergence dominée pour les suites d'intégrales

a) *Théorème* : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues (par morceaux).

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ continue (par morceaux).

On suppose qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *intégrable* et dominant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$.

Alors f est intégrable sur I, et $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Remarque : On a $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$, donc les f_n sont intégrables.

Par passage à la limite, on a aussi $|f(t)| \leq \varphi(t)$, donc f est aussi intégrable.

Remarque : Il suffit que la majoration $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ soit vraie pour n assez grand.

Exemple : Supposons f de classe C^1 sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = 0$. On a $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 f(x^n)\ dx = \int_0^1 \dfrac{f(t)}{t}\ dt$.

En effet, avec $x = t^{1/n}$ sur $]0,1]$, on a $n \int_0^1 f(x^n)\ dx = \int_0^1 \dfrac{f(t)}{t^{1-1/n}}\ dt$. On a $\forall t \in]0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t^{1-1/n}} = \dfrac{f(t)}{t}$.

Et la domination est vérifiée : $\left|\dfrac{f(t)}{t^{1-1/n}}\right| \leq \dfrac{|f(t)|}{t} = \varphi(t)$ intégrable sur $]0,1]$, car $\lim_{t\to 0, t>0} \varphi(t) = |f'(0)|$.

Exemple : Supposons que I est un segment. Pour que l'hypothèse de domination soit vérifiée, il suffit que les f_n soient uniformément bornées (c'est-à-dire qu'il existe M indépendant de n tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup |f_n| \leq M$).

Exemple : *Contre-exemple* : Considérons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt$, avec $\forall t \in]0,+\infty[$, $f_n(t) = ne^{-nt}$.

On a $\forall t \in]0,+\infty[$, $\lim_{n\to+\infty}(ne^{-nt}) = 0$. Mais on ne peut pas trouver de fonction de domination.

D'ailleurs, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 1 \neq 0$. Ici, la limite des intégrales n'est pas l'intégrale de la limite.

Exemple : On a $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\ dt$. Montrons que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\ dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons les fonctions continues $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \text{ si } 0 < t \leq n \\ 0 \text{ si } t \geq n \end{cases}$

Pour tout $t > 0$, on a $f_n(t) = t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ pour n assez grand, donc $\lim_{n\to+\infty} t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}e^{-t} = f(t)$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall t \in]0,+\infty[$, $f_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t} = f(t)$, car $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f$, d'où le résultat.

Remarque : $\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\ dt = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\ du = \dfrac{n!\ n^x}{x(x+1)...(x+n)}$.

On en déduit la formule classique $\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\ dt = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!\ n^x}{x(x+1)...(x+n)}}$.

Par exemple, $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)...(n-\frac{1}{2}) \sim n!\sqrt{\pi n}$, car $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2) Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions

a) *Théorème* : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues (par morceaux) convergeant simplement sur I vers une fonction S, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$: convergence point par point.

On suppose que S est continue (par morceaux) et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_n|$ converge.

$\boxed{\text{Alors } S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est intégrable et } \int_I S=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n}$.

Exemple **:** On a $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$. L'application $t\longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$.

En effet, on a $\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{\ln(1+t)}{t}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$, et comme $\int_0^1 \dfrac{t^n}{n}\,dt=\dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\dfrac{t^n}{n}\,dt$ converge.

b) *Exemple* **:** $\int_0^1 \dfrac{e^t-1}{t}\,dt=\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^{n-1}}{n!}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n.n!}$.

En effet, $e^t=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n!}$, donc $\dfrac{e^t-1}{t}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^{n-1}}{n!}$ continue sur $[0,1]$, et la série $\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^{n-1}}{n!}\,dt$ converge.

Exemple **:** $\int_0^{+\infty}\dfrac{t}{e^t-1}\,dt=\int_0^{+\infty}t\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nt}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}te^{-nt}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

Remarque importante : De façon générale, si les fonctions continues par morceaux f_n sont *positives* et si $\sum f_n$ converge vers une fonction S *continue* (par morceaux) et *intégrable*, alors $\int_I S=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$.

Exemple **:** On a $\int_0^{+\infty}\dfrac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{2te^{-t}}{1-e^{-2t}}\,dt=2\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}te^{-(2n+1)t}\,dt=2\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{4}$.

c) *Cas des séries alternées.*

Prop : Supposons que pour tout $x\in I$, $\sum(-1)^n f_n(x)$ est une série vérifiant le critère spécial des séries alternées.

On pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)$, et on suppose S cpm et les f_n cpm et intégrables.

On suppose de plus que $\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n=0$. Alors S est intégrable et $\int_I S=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_I f_n$.

Remarque : On ne peut pas toujours appliquer directement le théorème ITT, car il se peut que $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n=+\infty$.

Preuve : La fonction S est intégrable car $|S|\le f_0$.

On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k(x)$. On a par linéarité $\int_I S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_I f_k$.
Il s'agit de prouver que $\int_I S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_I f_k$, c'est-à-dire $\int_I S=\lim_{n\to+\infty}\int_I S_n$.

En posant $R_n=S-S_n$, il s'agit donc de montrer : $\lim_{n\to+\infty}\int_I R_n.=0$. Or, on a $|R_n|\le f_{n+1}$, donc $\left|\int_I R_n\right|\le\int_I f_n\to 0$.

Autre preuve : On applique le th de cv dominée à $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ayant comme domination : $0\le S_n\le f_0$.

Exemple **:** On a $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n\,dx$ qui est égal en fait à $\int_0^1\dfrac{dx}{1+x}=\ln(2)$.

Remarque : Une autre solution consisterait, pour se ramener au cas du b), à regrouper les termes deux par deux.

En effet, $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k(x)$, où $g_k(x)=f_{2k}(x)-f_{2k+1}(x)\ge 0$: on peut alors appliquer le th ITT.

3) Intégrales dépendant d'un paramètre continu

Rappel : *Caractérisation séquentielle des limites* : Soit $g:I\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ adhérent à I.
Alors $\lim_{x\to a}g(x)=L$ ssi pour *toute* suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I, on a $\lim_{n\to+\infty}g(x_n)=L$.

Prop : Soit $f:A\times I\to\mathbb{R}$ $(x,t)\longmapsto f(x,t)$ telle que $t\longmapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur I (pour tout x).

On suppose qu'il existe $\lambda:I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\boxed{\forall t\in I,\ \lambda(t)=\lim_{x\to a}f(x,t)}$.

On suppose qu'il existe $\varphi:I\to\mathbb{R}$ telle que $\boxed{\varphi \text{ est intégrable et } \forall x\in A,\ \forall t\in I,\ |f(x,t)|\le\varphi(t)}$.

Alors λ est intégrable sur I et $\boxed{\lim_{x\to a}\int_I f(x,t)\,dt=\int_I\lambda(t)\,dt}$.

dem : Il s'agit de prouver que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a dans A, on a $\lim_{n\to+\infty}\int_I f(x_n,t)\,dt=\int_I\lambda(t)dt$.

On applique le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n(t) = f(x_n, t)$.

On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lambda(t)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$. D'où le résultat.

Exemple : (♣) Soit f intégrable sur $[0, +\infty[$. On considère $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-tx}\ dt$. Alors $\lim_{x\to+\infty} L(x) = 0$.

En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. On a $\forall t$, $\lim_{n\to+\infty} f(t)e^{-tx_n} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(t)e^{-tx_n}| \leq |f(t)|$.

Par le théorème de convergence dominée, on a donc $\lim_{n\to+\infty} L(x_n) = \int_0^{+\infty} 0 = 0$.

Exemple : (♣) *Théorème de Cesàro* (pour les fonctions).

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, alors $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \int_0^x f(t)\ dt = L$.

En effet, $\dfrac{1}{x} \int_0^x f(t)\ dt = \int_0^1 f(tx)\ dt$. On a $\lim_{x\to+\infty} f(tx) = L$ et $f(tx) \leq L$, donc $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(tx)\ dt = \int_0^1 L\ dt = L$.

4) Théorème de convergence dominée pour les séries

Théorème : Soit $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_n(k)$ une série dont le terme général dépend d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$..

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n(k) = b(k)$.

On suppose qu'il existe une série $\sum_{k\in\mathbb{N}} m(k)$ à termes positifs et convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, |a_n(k)| \leq m(k).$$

Alors les séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_n(k)$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} b(k)$ convergent, et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_n(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} b(k)$.

Preuve : On considère $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = a_n(\lfloor x \rfloor)$ et $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = m(\lfloor x \rfloor)$.

On applique le théorème de cv dominée à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dominée par φ intégrable.

Exemple : Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \dfrac{e}{e-1}$.

Remarque : On obtient donc $\sum_{k=0}^{n} k^n \sim \dfrac{e}{e-1} n^n$.

On applique le théorème à $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(k) = \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^n$ si $k \leq n$ et 0 si $k > n$.

On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n(k) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = e^{-k}$ et $a_n(k) \leq e^{-k}$. La série dominante $\sum e^{-k}$ converge.

5) *Complément : Théorème de convergence monotone*

a) *Théorème* : Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de foncitons continues positives (par morceaux) convergeant simplement sur I vers une fonction S continue par morceaux. Alors $\int_I S(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt$.

En termes de séries de fonctions :

Si les f_n sont continues (par morceaux) et positives et si $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue, alors $\int_I S(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Remarque : On a $S_n \leq S$, donc $\int_I S_n(t)\ dt \leq \int_I S(t)\ dt$. Si $\lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt = +\infty$, alors $\int_I S(t)\ dt = +\infty$.

Ce théorème n'est pas au programme mais se déduit du théorème ITT ou du théorème de cv dominée.

Si $\lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt < +\infty$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ converge, alors $\int_I S(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt$ par le th ITT.

Si S est intégrable, alors $\forall n$, $S_n \leq S$, donc par convergence dominée, $\int_I S(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt$.

$\boxed{\textbf{Utilisation du théorème de convergence dominée pour obtenir un équivalent}}$

$\boxed{\text{Le principe consiste à se ramener à une limite non nulle}}$ (en pratique, à une fonction limite positive non nulle).

On utilise de façon essentielle des changements de variables (souvent affine et fonction du paramètre) pour renormaliser l'intégrale de sorte à faire apparaître une fonction limite non nulle.

Exemple : Considérons, $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$.

Le théorème de cv dominée permet d'obtenir $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

En effet, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)^n} = 0$ et $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.

$\boxed{\text{Mais pour obtenir un équivalent, on effectue un changement de variable}}$, afin d'exploiter $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n = e^{u^2}$.

En effet, on a $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \dfrac{du}{(1+u^2/n)^n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} J_n$, où $J_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{du}{(1+u^2/n)^n}$.

On a $\forall u > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+u^2/n)^n} = e^{-u^2}$.

D'autre part, on a, par la formule du binôme, $\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n \geq 1 + n\dfrac{u^2}{n} = 1+u^2$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in [0,+\infty[$, $\dfrac{1}{(1+u^2/n)^n} \leq \dfrac{1}{1+u^2} = \varphi(u)$, avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où $I_n \sim \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

Exemple : Considérons $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt$.

Le théorème de convergence dominée donne $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

En effet, $\forall t \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+t^n) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \ln(1+t^n) \leq \ln 2$.

Pour obtenir un équivalent, on effectue le changement de variable $u = t^n$, c'est-à-dire $t = u^{1/n}$.

En effet, on obtient $I_n = \dfrac{1}{n} J_n$, où $J_n = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}\, du$.

Le théorème de convergence dominée donne $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t^{1-1/n}}\, dt = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t}\, dt$.

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]0,1]$, $0 \leq \dfrac{\ln(1+t)}{t^{1-1/n}} \leq \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ et $\forall t \in]0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+t)}{t^{1-1/n}} = \dfrac{\ln(1+t)}{t}$.

On en conclut que $I_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$, où $\lambda = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t}\, dt$. Montrons pour conclure que $\lambda = \dfrac{\pi^2}{12}$.

En effet, on a $\forall t \in]0,1]$, $\dfrac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$, on a par ITT : $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Exemple : Considérons $I(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{1+xt^2}\, dt$.

On cherche un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Le théorème convergence dominée donne $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$ (en prenant $\varphi(t) = e^{-t}$).

On effectue le changement de variable affine $u = \sqrt{x}t$.

On obtient $I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} J(x)$, où $J(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u/\sqrt{x}}}{1+u^2}\, du$.

On a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-u/\sqrt{x}}}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+u^2}$, et $\dfrac{e^{-u/\sqrt{x}}}{1+u^2} \leq \dfrac{1}{1+u^2}$.

D'où $\lim_{x\to+\infty} J(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+u^2}\, du = \dfrac{\pi}{2}$, et on en conclut qu'en $+\infty$, $I(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice : On pose $\forall x \geq 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} du$ et $\forall x > 0,\ g(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}} dt$.

Montrer que $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On donne $f(0) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Déterminer un équivalent de g en 0^+ et en $+\infty$.

Solution :

On a $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} f(u,x)\ du$, avec $f(u,x) = \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{1+u/x}}$.

On a $\forall u \in [0,+\infty[$, $\lim_{x\to+\infty} f(u,x) = e^{-u}$ et $\forall x > 0$, $\forall u \in [0,+\infty[$, $0 \leq f(u,x) \leq e^{-u}$.

On déduit du théorème de convergence dominée que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(u,x)\ du = \int_0^{+\infty} e^{-u}\ du = 1$.

En toute rigueur, on devrait revenir à la caractérisation séquentielle (en considérant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$).

On obtient donc $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En effectuant le changement de variable $u = tx$, on a $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}\ du = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

On a donc $g(x) \sim \dfrac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

D'autre part, $\forall u \in [0,+\infty[$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} = \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ et $\forall x > 0$, $\forall u \in [0,+\infty[$, $0 \leq \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} \leq \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} = \varphi(u)$.

Par convergence dominée, on obtient $\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}\ du = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. D'où $g(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$.

Transformée de Laplace

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, telle que pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose $\forall x > 0$, $L(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\ dt$. La fonction L est appelée transformée de Laplace de f.

Prop : On a $\lim_{x\to+\infty} L(x) = 0$.

Preuve : On a $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^{-xt}f(t) = 0 \text{ si } t > 0 \text{ (et } f(0) \text{ si } t = 0) \\ \forall x \geq 1,\ \forall t \in [0,+\infty[,\ |f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|\, e^{-t} = \varphi(t) \text{ intégrable} \end{cases}$, donc $\lim_{x\to+\infty} L(x) = \int_0^{+\infty} 0\ dt = 0$.

Théorème de la valeur initiale : On suppose f bornée et $f(0) \neq 0$. Alors $L(x) \sim \dfrac{f(0)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Preuve : En effet, $L(x) = \dfrac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u}f(\dfrac{u}{x})\ du$. Posons $M = \sup_{[0,+\infty[} |f|$.

$\forall x > 0$, $\forall u \in [0,+\infty[$, $\left|e^{-u}f(\dfrac{u}{x})\right| \leq Me^{-u}$, et $\forall u \in [0,+\infty[$, $\lim_{x\to+\infty}\ e^{-u}f(\dfrac{u}{x}) = f(0)$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u}f(\dfrac{u}{x})\ du = \int_0^{+\infty} e^{-u}f(0)\ du = f(0)$.

Théorème de la valeur finale : On suppose $\lim_{+\infty} f = \lambda \neq 0$. Alors $L(x) \sim \dfrac{\lambda}{x}$ lorsque x tend vers 0^+.

Preuve : En effet, $L(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\ dt = \dfrac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u}f(\dfrac{u}{x})\ du$.

Or, la fonction f est bornée (car continue sur $[0,+\infty[$ et convergeant en $+\infty$).

On a $\forall x > 0$, $\forall u \in]0,+\infty[$, $\left|e^{-u}f(\dfrac{u}{x})\right| \leq Me^{-u}$ et $\forall u \in]0,+\infty[$, $\lim_{x\to 0, x>0}\ e^{-u}f(\dfrac{u}{x}) = \lambda e^{-u}$.

Méthode de Laplace

Théorème : On considère $I_n = \int_0^{+\infty} f(t)^n \omega(t)\ dt$ avec les hypothèses suivantes :

i) ω continue, bornée et intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\omega(0) > 0$

ii) $f(0) = 1$, $f(t) = 1 - \lambda t^p + \mathfrak{o}\left(t^p\right)$ en $t = 0$ (avec $p > 0$)

iii) Il existe $\mu > 0$ tel que $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq f(t) \leq \exp(-\mu t^p)$.

Alors il existe $L > 0$ tel que $I_n \sim \dfrac{L}{n^\alpha}$, avec $\alpha = \dfrac{1}{p}$.

dem : Avec le changement de variable $t = \dfrac{u}{n^\alpha}$, on obtient $I_n = \dfrac{1}{n^\alpha} A_n$, où $A_n = \int_0^{+\infty} f\left(\dfrac{u}{n^\alpha}\right)^n \omega\left(\dfrac{u}{n^\alpha}\right)\ du$.

Pour $u \geq 0$ fixé, on a $f\left(\dfrac{u}{n^\alpha}\right) = 1 - \lambda \dfrac{u^p}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{u}{n^\alpha}\right)^n \omega\left(\dfrac{u}{n^\alpha}\right) = \exp(-\lambda u^p)\omega(0)$.

D'autre part, $f\left(\dfrac{u}{n^\alpha}\right)^n \omega\left(\dfrac{u}{n^\alpha}\right) \leq M \exp(-\mu u^p) = \varphi(u)$, et φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} A_n = \int_0^{+\infty} \exp(-\mu u^p)\omega(0)\ du = \dfrac{1}{\mu^\alpha} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \omega(0)\ dx = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{\mu^\alpha}\omega(0) = L$.