Fonctions intégrables, intégrales absolument convergentes et semi-convergentes

1) Intégrales impropres absolument convergentes

a) *Définition.* On dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est absolument convergente ssi $\int_a^b |f(t)|\ dt < +\infty$.

b) *Théorème* (admis) : Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Plus précisement, si $\int_a^b |f(t)|\ dt < +\infty$, alors l'intégrale de f sur $[a,b[$ converge et on a : $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$.

c) *Utilisations des théorèmes de comparaison.*

Exemple : On suppose $f(t) = O_b(g(t))$, où g est une fonction positive sur $[a,b[$ telle que $\int_a^b |g(t)|\ dt < +\infty$.

Alors l'intégrale de f est (absolument) convergente sur $[a,b[$. En effet, on a $|f(t)| = O_b(g(t))$.

Exemple : (♣) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\ dt$ est (absolument) convergente car $\frac{\sin(t)}{t^2} = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2) Fonctions intégrables sur un intervalle

a) *Fonctions positives intégrables.* Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et POSITIVE.

On pose $\int_I f = \sup\left\{\int_J f,\ J \text{ segment inclus dans } I\right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ (définition inutile en pratique)

On dit que f est intégrable ssi $\int_I f \in \mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire ssi $\exists\, M, \forall J$ segment, $\int_J f \leq M$). Sinon, $\int_I f = +\infty$.

Définition équivalente : Avec $I = [a,b[$, f est intégrable sur I ssi l'intégrale de f converge sur $[a,b[$.

Il en est de même dans les autres cas $I =]a,b]$, $I =]a,b[$ et $I = [a,b]$. Et on a $\int_I f = \int_a^b f(t)\ dt$.

b) *Fonctions intégrables.* On dit que f est intégrable sur I ssi $|f|$ est intégrable sur I, c'est-à-dire $\int_I |f| < +\infty$.

c) *Propriétés.*

- Si f et g sont intégrables sur I, et si $f \leq g$, alors $\int_I f \leq \int_I g$.
- Si f est continue et positive, $\int_I f = 0$ ssi f est identiquement nulle.
- Si f est intégrable, alors $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$. *Remarque* : Si f est continue, il y a égalité ssi f est de signe constant.
- Si I est la réunion de deux intervalles J et K d'intérieurs disjoints, alors f est intégrable sur I ssi f est intégrable à la fois sur J et sur K, et on a la propriété d'additivité (Chasles) : $\int_I f = \int_J f + \int_K f$.

Exemple : (♣♣♣) Si f et g sont de carrés intégrables sur $[0,+\infty[$, alors fg est intégrable.

En effet, on a $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2)$. On obtient ainsi $\left|\int_0^{+\infty} fg\right| \leq \int_0^{+\infty} |fg| \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f^2 + \int_0^{+\infty} g^2\right)$.

Autre preuve : Par Cauchy-Schwarz, on a, pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x |fg| \leq \sqrt{\int_0^x f^2 \int_0^x g^2}$.

Exercice : (♣♣♣) Supposons $\int_0^{+\infty} f^2$ et $\int_0^{+\infty} (f')^2$ convergentes. Alors f converge vers 0 en $+\infty$.

Solution : Posons $g = f^2$. On a $|g'| = 2\,|ff'| \leq f^2 + (f')^2$. Donc $\int_0^{+\infty} g$ et $\int_0^{+\infty} g'$ converge.

Donc g converge (car $\int_0^{+\infty} g'$ converge), et la limite est nécessairement nulle (car $\int_0^{+\infty} g$ converge).

Ainsi, f^2 converge vers 0, donc f converge vers 0 en $+\infty$ (car $|f| = \sqrt{g}$).

d) *Espaces vectoriels $L^p(I,\mathbb{R})$.*

Notons $E = C_m^0(I,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I.

Exemple : (♣♣♣) Posons $L^1(I,\mathbb{R}) = \{f \in E \mid f \text{ intégrable sur } I\ \} = \{f \in E \mid \int_I |f| < +\infty\}$.

Alors $L^1(I,\mathbb{R})$ est un sev de $C^0_m(I,\mathbb{R})$.

En effet, $0 \in L^1(I,\mathbb{R})$, et si f et $g \in L^1(I,\mathbb{R})$, alors $|\lambda f + \mu g| \leq |\lambda|\,|f| + |\mu|\,|g|$, donc $\lambda f + \mu g$ est intégrable.

Exemple : (♣♣♣) On note $L^2(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in E$ et de carré intégrable sur I.

$\boxed{\text{Autrement dit, } L^2(I,\mathbb{R}) = \{f \in E \mid \int_I f^2 < +\infty\}. \text{ Alors } L^2(I,\mathbb{R}) \text{ est un sev de } C^0_m(I,\mathbb{R})}$.

En effet, si f et g sont de carrés intégrables, la fonction fg est intégrable, donc $f+g$ est de carré intégrable (car $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$). D'autre part, si $f \in L^2(I,\mathbb{R})$, alors $\lambda f \in L^2(I,\mathbb{R})$ pour tout réel λ.

Remarque : $L^2(I,\mathbb{R}) \cap C^0(I,\mathbb{R})$ est muni naturellement du produit scalaire $(f \mid g) = \int_I fg$.

4) Intégrales semi-convergentes

Définition : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue (par morceaux).

On dit que l'intégrale de f est semi-convergente sur $[a,b[$ ssi l'intégrale converge mais ne converge pas absolument.

Exemple classique (intégrale de Dirichlet) : (♣♣♣) Considérons $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$.

La fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

On va montrer que $\boxed{\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,dt \text{ converge et que } \int_0^{+\infty} \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|\,dt = +\infty}$.

Remarque culturelle : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est appelée intégrale de Dirichlet (et vaut $\frac{\pi}{2}$).

a) Pour prouver qu'il existe $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt$ converge, on intègre par parties pour obtenir un terme en $\dfrac{1}{t^2}$.

On a $\int_{\pi/2}^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\dfrac{\cos t}{t}\right]_{\pi/2}^{+\infty} - \int_{\pi/2}^x \dfrac{\cos t}{t^2}\,dt$. Donc il existe $\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt = -\int_{\pi/2}^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^2}\,dt$.

Variante : $\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt = \left[\dfrac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^x \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,dt$, et $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0 (par $\frac{1}{2}$).

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ converge, donc on obtient $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,dt$.

b) Montrons que $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|\,dt = +\infty$.

$\boxed{\text{La valeur absolue incite à découper l'intégrale de sorte à se ramener à l'étude d'une série}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|\,dt$.

Alors, $u_n \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin t|}{(n+1)\pi}\,dt \geq \dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt = \dfrac{1}{(n+1)\pi}$, car $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt = \int_0^{\pi} (\sin u)\,du = 1$.

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1} = +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|\,dt = +\infty = +\infty$.

Exemple : (♣♣) Considérons $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}\ \ t \longmapsto \sin(e^t)$.

On a $\int_0^x \sin(e^t)\,dt = \int_1^{e^x} \dfrac{\sin u}{u}\,du$, avec $u = e^x$. Il résulte de l'exemple précédent que $\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\,dt$ converge.

D'autre part, le même changement de variable donne $\int_0^{+\infty} \left|\sin(e^t)\right|\,dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{|\sin u|}{u}du = +\infty$.