Séries

1) Convergence d'une série

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$ (somme partielle).

a) *Définition* : $\boxed{\text{On dit que la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ converge ssi la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.

Dans ce cas, $\boxed{S = \lim_{n\to+\infty} S_n \text{ est appelée somme de la série, et notée } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$.

La nature (convergente ou divergente) de la série ne dépend que du comportement asymptotique de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition : Le reste d'indice n est $\boxed{R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k}$. On a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n = 0}$.

b) *Condition nécessaire de convergence* :

$\boxed{\text{Si } \sum a_n \text{ converge, alors nécessairement } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \text{ En effet } a_n = S_n - S_{n-1}}$.

IMPORTANT : La réciproque est fausse : par exemple, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

2) Exemples de séries dont on sait calculer la somme

a) *Série géométrique*

Principe : Soit $z \in \mathbb{C}$. $\boxed{\text{La série } \sum z^n \text{ converge ssi } |z| < 1, \text{ et dans ce cas } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}}$.

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \dfrac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \dfrac{1}{e-1}$ et plus généralement, pour $\operatorname{Re} z < 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nz} = \dfrac{1}{1-e^z}$.

b) *Sommations par télescopage*

Principe : $\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = L, \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - u_{n+1}) = u_0 - L}$.

Exemple : On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$.

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+p)} = \dfrac{1}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p}\right) = \dfrac{1}{p} \sum_{n=1}^{p-1} \dfrac{1}{n}$.

De façon analogue $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{4}$.

c) *Formule de Taylor-Lagrange*

Principe : Si $f : [0,x] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, on a $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} \left| f^{(n+1)} \right|$.

Si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} \left| f^{(n+1)} \right| = 0$, alors on obtient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Exemple : $\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!} \right| \leq \dfrac{|z|^{n+1}}{n!} \sup_{t\in[0,1]} \left| e^{tz} \right| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, donc $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}}$

Exemple : $\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \dfrac{1}{n+1}$. Donc $\boxed{\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}}$ (série harmonique alternée).

En effet, on applique l'inégalité de Tayor-Lagrange à $x \longmapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre n sur $[0,1]$.

3) Comparaison d'une série et d'une intégrale associée à une fonction positive décroissante

Remarque : Tout série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ peut être représentée par une intégrale. En effet, on considère la fonction continue par morceaux $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [n, n+1[$, $f(t) = a_n$, c'est-à-dire $f(t) = a_{E(t)}$.

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge ssi l'intégrale de f converge sur $[0,+\infty[$, et dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

a) *Principe d'encadrement* (on suppose ici connues les propriétés du paragraphe 4)a))

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante, positive et continue. On considère $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)}$.

On a $\forall n \geq 1$, $\boxed{\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n \leq f(1) + \int_1^n f(t)\,dt}$. D'où :

Prop : $\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge ssi } \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$.

Exemple : (séries de Riemann) : $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1}$.

En particulier, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge , et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Exemple : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge car $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ diverge (on a $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln \ln t]_e^{+\infty} = +\infty$).

b) *Evaluation du reste*

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante positive et telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. La série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.

$\boxed{\text{Le reste } R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \text{ vérifie } \int_n^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} f(t)\,dt}$.

Exemple : Avec $f(t) = \frac{1}{k^2}$, on obtient $\boxed{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{+\infty} f(t)\,dt}$, donc $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

Variante : $\boxed{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq f(n) + \int_n^{+\infty} f(t)\,dt}$.

4) Théorèmes de comparaison entre séries à termes réels POSITIFS

a) *Remarque fondamentale* : $\sum a_n$ est à termes positifs ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Dans ce cas, $\sum a_n$ converge ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Sinon, $\sum a_n$ tend vers $+\infty$, et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Lemme : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq b_n$ et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

b) *Th de comparaison* : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles POSITIVES.

Remarque : Il suffit que les suites soeint positive à partir d'un certain rang.

i) $\boxed{\text{Si } a_n = O(b_n) \text{ et si } \sum b_n \text{ converge, alors } \sum a_n \text{ converge}}$.

ii) $\boxed{\text{Si } a_n \sim b_n, \text{ alors } \sum a_n \text{ converge ssi } \sum b_n \text{ converge}}$.

iii) $\boxed{\text{Si } a_n \geq b_n \text{ pour } n \text{ assez grand et si } \sum b_n \text{ diverge, alors } \sum a_n \text{ diverge (vers } +\infty)}$.

Remarque : Ces propriétés sont analogues à celles des intégrales des fonctions positives sur $[0,+\infty[$.

c) *Exemple* : Si $a_n = O_{+\infty}(n^{-2})$, alors $\sum a_n$ converge ; si $a_n \geq \frac{\lambda}{n}$ pour n assez grand avec $\lambda > 0$, $\sum a_n$ diverge.

5) Convergence absolue

a) *Séries à termes réels ou complexes absolument convergentes*

Prop : $\boxed{\text{Si } \sum |a_n| \text{ converge, alors } \sum a_n \text{ converge}}$. On dit que $\sum a_n$ converge absolument.

Preuve : Posons $u_n = a_n + |a_n|$. On a $0 \leq u_n \leq 2|a_n|$, donc $\sum u_n$ converge. Donc $\sum a_n$ converge.

Corollaire : $\boxed{\text{Si } a_n = O(b_n) \text{ et si } \sum b_n \text{ est une série convergente à termes POSITIFS, alors } \sum a_n \text{ converge absolument}}$.

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$ converge (absolument), car $\frac{\sin n}{n^2} = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) *Séries semi-convergentes*

Une série semi-convergente est une série convergente mais non absolument convergentes.

Exemple : La série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

6) Séries alternées, majoration du reste

a) *Critère spécial de convergence des séries alternées.*

Prop : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, décroissante et convergent vers 0. Alors $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Preuve : $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers la même limite. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple (séries alternées de Riemann) : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 0$.

b) *Regroupement des termes deux par deux dans les séries alternées.*

$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_{2k} - a_{2k+1}) = a_0 - \sum_{k=0}^{+\infty}(a_{2k+1} - a_{2k+2})}$.

En particulier, $\boxed{0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \leq a_0}$ (ce qui correspond à l'inégalité $S_{-1} \leq a_0 \leq S_0$).

Exemple : On peut ainsi montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 0$ par $\frac{1}{(2k)^\alpha} - \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right)$.

c) *Majoration du reste.* Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée vérifiant le critère du a).

$\boxed{\text{Alors le reste } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k \text{ vérifie } |R_n| \leq |a_{n+1}|}$.

Exemple : $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$ (on retrouve le majorant obtenu à l'aide de Taylor-Lagrange au 2)).

7) Utilisation d'un développement limité

Recommandation : Penser à utiliser les équivalents (à termes positifs) qui donnent des CNS de convergence.

Remarque : On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$. Si $\sum u_n$ converge et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum w_n$ diverge.

En effet, si $\sum w_n$ convergeait, la série $\sum v_n = \sum w_n - \sum u_n$ convergerait comme somme de séries convergentes.

Exemple : Considérons $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. On a : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{n}$.

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (série alternée).

La série $\sum \varepsilon_n$ diverge vers $+\infty$ (par comparaison à une série divergente à termes positifs).

Donc $\sum u_n$ diverge (vers $-\infty$).

Commentaires : IMPORTANT :

- La suite $(|u_n|)_{n\geq 2} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)_{n\geq 2}$ n'est pas décroissante.

Ici, le critère spécial des séries alternées ne s'applique pas.

- On a $\boxed{u_n \sim v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}. \text{ La série } \sum u_n \text{ diverge mais la série } \sum v_n \text{ converge}}$: les énoncés des théorèmes de comparaison ne concernent que les séries à termes positifs (à partir d'un certain rang).

Exemple : Considérons la série $\sum \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

En effet, $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Il est ici inutile de chercher un équivalent de ε_n :

Comme les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \varepsilon_n$ convergent, alors la série $\sum \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

Exemple : Considérons la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Pour que la série converge, le terme général doit tendre vers 0, c'est-à-dire $\alpha > 0$.

Dans ce cas, $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$.

On en déduit que $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exemple : Considérons la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Pour que la série converge, le terme général doit tendre vers 0, c'est-à-dire $\alpha > 0$.

Dans ce cas, $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$.

On en déduit que $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exemple : Considérons la série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

On a $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

Donc $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \dfrac{\pi}{2n} + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Comme les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \varepsilon_n$ convergent, alors la série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ converge.

8) Etude d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une série, exemple de la constante d'Euler

a) *Principe* $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si la série } \sum(u_{n+1}-u_n) \text{ converge}}$.

En effet, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0$.

Exemple : Soit $f : I \to I$ une fonction contractante : il existe $k < 1$ tel que $|f(x)-f(y)| \le k\,|x-y|$.

Alors, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_o \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge.

En effet, $|u_{n+1}-u_n| \le k^n\,|u_1-u_0|$, donc $u_{n+1}-u_n = O(k^n)$, donc $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument.

Si $c = \lim_{n\to+\infty} u_n \in I$, alors par continuité de f, on a $f(c) = c$ (qui est d'ailleurs l'unique point fixe de f).

b) *Exemples*

Exemple : Considérons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n}$.

On a $\boxed{u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right), \text{ donc la série } \sum(u_{n+1}-u_n) \text{ converge}}$.

On en déduit qu'il existe $\boxed{\gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n, \text{ appelée } \textit{constante d'Euler}}$.

Exemple : Considérons $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{n^n}{n!}e^{-n}\sqrt{n}$.

Par un développement limité (laissé au lecteur), on obtient $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O(\frac{1}{n^2})$.

On en déduit que la suite $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif $\lambda > 0$.

On obtient ainsi $n! \sim \lambda\sqrt{n}n^n e^{-n}$, et on montre par ailleurs (via les intégrales de Wallis) que $\lambda = \sqrt{2\pi}$.

La formule $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ est appelé formule de Stirling.

9) Règles de D'Alembert et de Raabe-Duhamel

a) *Règle de D'Alembert : comparaison avec une série géométrique*

$$\textit{Prop} : \begin{cases} \text{Si } \lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ converge (absolument)} \\ \text{Si } \lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l > 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Preuve : (IMPORTANT)

Supposons $l < 1$. Considérons k vérifiant $l < k < 1$. Donc pour $n \geq n_0$ assez grand, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k$.

On en déduit $u_n = O(k^n)$, donc par comparaison, $\sum |u_n|$ converge.

Supposons $l > 1$. On vérifie par un raisonnement analogue que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

Donc a fortiori $\sum u_n$ diverge.

b) *Règle de Raabe-Duhamel* IMPORTANT, mais ... HP.

Lemme : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif $\lambda > 0$.

Preuve : On a $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\sum(\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ converge, c'est-à-dire $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ, d'où le résultat avec $\lambda = e^{\mu}$.

Prop : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda n^{\alpha}$.

Preuve : On pose $v_n = \dfrac{u_n}{n^{\alpha}}$. On vérifie que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et on conclut comme précédemment.

Remarque : La règle de Raabe-Duhamel est particulièrement utile pour étudier les produits infinis.

Par exemple, si $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{3k}\right)$, alors il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda n^{1/3}$.

10) Etude des produits infinis

Soit $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels > -1. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \prod_{k=0}^{n}(1 + a_k)$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln u_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + a_k)$.

On dit que $\prod_{k=0}^{+\infty}(1 + a_k)$ converge ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel > 0, c'est-à-dire ssi $\sum \ln(1 + a_n)$ converge

Principe de l'étude : Supposons $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Si les a_n sont positifs, on a $\ln(1 + a_n) \sim a_n$, donc $\sum \ln(1 + a_n)$ converge ssi $\sum a_n$ converge.

Dans le cas général, on utilise $\ln(1 + a_n) = a_n - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2}(a_n)^2 \geq 0$.

Exemple : $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge, car $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n} - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

Exemple : On considère $u_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{3k}{3k+1}$. On a $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{3k}{3k+1}\right)$.

Comme $\ln\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right) = -\ln\left(1 + \dfrac{1}{3n}\right) \sim -\dfrac{1}{3n}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Complément : On a $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 1 - \dfrac{1}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par le règle de Raab-Duhamel, il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^{1/3}}$.

11) Etude d'une intégrale par une série

Principe : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue et *positive*.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante vérifiant $x_0 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, où $a_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\ dt$.

Exemple : $\int_0^{+\infty} \dfrac{|\sin t|}{t}\ dt = +\infty$. On considère $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin t|}{t}\ dt$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\pi} \dfrac{|\sin(u + n\pi)|}{u + n\pi}\ du = \int_0^{\pi} \dfrac{\sin(u)}{u + n\pi}\ du \geq \int_0^{\pi} \dfrac{\sin(u)}{(n+1)\pi}\ du = \dfrac{2}{(n+1)\pi}$.

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.

12) Séries indexées par $\mathbb{Z}$

Définition : On dit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ converge ssi les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{-n}$ convergent.

Dans ce cas, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$.

Remarque : Il peut exister $\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=-n}^{n} a_k)$ sans que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ converge, par exemple avec $a_n = \operatorname{sgn} n$.

13) Sommation des équivalents pour les séries à termes POSITIFS HP

Prop : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des séries *à termes positifs*. On suppose $a_n \sim b_n$.

i) On suppose que la série $\sum b_n$ converge. Alors $\sum a_n$ converge. De plus :

On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et $S_n = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$. Alors $R_n \sim S_n$ (équivalence des restes)

ii) On suppose que la série $\sum b_n$ diverge (vers$+\infty$). Alors $\sum a_n$ diverge (vers $+\infty$). De plus :

On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Alors $A_n \sim B_n$ (équivalence des sommes partielles).

Exemple : Posons $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Comme $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}dt$, alors $R_n \sim \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt = \frac{1}{n}$.

Exemple : (Théorème de Cesàro). Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = L > 0$, alors $A_n \sim nL$, car $nL = \sum_{k=1}^{n} L \to +\infty$.

14) Théorème de Fubini sur les séries doubles (HP)

Prop : Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|\right) < +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}\right)$.

Remarque : En particulier, toutes les séries intervenant dans la relation précédente sont convergentes.

15) Comparaison séries et intégrales (HP)

a) *Principe* : $\boxed{\left|\int_n^{n+1} f(t)\ dt - f(n)\right| \leq \frac{1}{2} \sup_{[n,n+1]} |f'|}$, obtenu en intégrant $|f(t) - f(n)| \leq (t-n) \sup_{[n,n+1]} |f'|$.

En effet, $\left|\int_n^{n+1} (f(t) - f(n))\ dt\right| \leq \left|\int_n^{n+1} f(t)\ dt - f(n)\right| \leq \sup_{[n,n+1]} |f'| \int_n^{n+1} (t-n)\ dt$.

Corollaire : Si $\sum \sup_{[n,n+1]} |f'|$ converge, alors $\sum f(n)$ et $\left(\int_1^n f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Remarque : En fait, on a mieux : $\left|\int_n^{n+1} f(t)dt - f(n)\right| = \left|\int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)dt\right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\, dt$.

Ainsi, si $\int_1^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ converge, alors $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f$ sont de même nature.

Remarque : En fait, il existe un réel l tel que $f(1)+f(2)+...+f(n)-\int_1^{n+1} f(t)dt = l+\mathfrak{o}(1)$.

b) *Exemple* : $\sum \dfrac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge. En effet, avec $f(t)=\dfrac{\cos(\ln t)}{t}$, on a $\sup_{[n,n+1]} |f'(t)| = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Donc $\sum \dfrac{\cos(\ln n)}{n}$ est de même nature que la suite de terme général $\int_1^n f(t)\ dt = \sin(\ln n)$.
Or, la suite $(\sin(\ln n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (on peut trouver deux suites extraites convergeant vers 1 et vers -1).