Intégrales impropres

Rappel sur les comparaisons entre fonctions usuelles :

Pour tous $\alpha < \beta$, on a $x^\alpha = \mathfrak{o}_{+\infty}(x^\beta)$ en $+\infty$ et $x^\beta = \mathfrak{o}(x^\alpha)$ en 0^+. En $+\infty$, $x^\alpha = \mathfrak{o}_{+\infty}(e^{\varepsilon x})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

En $+\infty$, $(\ln x) = \mathfrak{o}_{+\infty}(x^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, et plus généralement $\boxed{(\ln x)^\alpha = \mathfrak{o}_{+\infty}(x^\varepsilon) \text{ pour tous } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon > 0}$.

En 0^+, $(\ln x) = \mathfrak{o}\left(x^{-\varepsilon}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$, et plus généralement $\boxed{(\ln x)^\alpha = \mathfrak{o}\left(x^{-\varepsilon}\right) \text{ pour tous } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon > 0}$.

Rappel : $\boxed{f(t) = O_b(g(t)) \text{ ssi il existe } k \text{ tel que } |f(t)| \leq k\,|g(t)| \text{ au voisinage de } b}$.

Exemple : $\dfrac{\sin t}{t(t-1)} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. En effet, $\sin t = O_{+\infty}(1)$ et $\dfrac{1}{t(t-1)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^2}$.

Remarque : $\boxed{\text{Si } f(t) = \mathfrak{o}_b(g(t)) \text{ , alors a fortiori } f(t) = O_b(g(t))}$. Par exemple, en $+\infty$, $t(\ln t) = O_{+\infty}(t^{3/2})$.

1) Intégrales impropres convergentes

a) *Définition.* Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue (par morceaux), avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$\boxed{\text{L'intégrale converge sur } [a,b[\text{ ssi il existe } \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt, \text{ notée } \int_a^b f(t)\,dt}$.

Exemples : $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2} = 1$; $\int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = 2$; $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t} = \lim_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ et $\int_0^1 \dfrac{dt}{t} = \lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^1 \dfrac{dt}{t}\right) = +\infty$.

Important : $\boxed{\text{La convergence de l'intégrale ne dépend que du comportement de } f(t) \text{ au voisinage de } b}$.

Autrement dit, l'intégrale converge sur $[a,b[$ ssi elle converge sur $[c,b[$, où $c < b$.

Propriété de Chasles : Par passage à la limite, $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

Si l'intégrale converge, on définit $\boxed{\text{le reste } R(x) = \int_x^b f(t)\,dt}$ et on a $\lim_{x\to b^-} R(x) = 0$.

b) *Interprétation en termes de primitives.* Soit F une primitive de f. On a $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

$\boxed{\text{L'intégrale de } f \text{ converge sur } [a,b[\text{ ssi } F \text{ admet une limite en } b^-}$, et on a alors $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^{b^-}$.

Exemples : Pour $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = [-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}$; $\int_0^1 (\ln t)\,dt = [t\ln t - t]_{0^+}^1 = -1$.

c) *Intégrales de Riemann. Exemples* : $\boxed{\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1}$; $\boxed{\int_0^1 \dfrac{dt}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha < 1}$.

Important : Si a et b sont réels (avec $a < b$), $\int_a^b \dfrac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \dfrac{dt}{(b-t)^\alpha}$ convergent ssi $\alpha < 1$

d) *Intégrale doublement impropre*

Def : Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est continue, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ existe ssi $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ existent, où on choisit $c \in [a,b]$.
Autrement dit, si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ existe ssi F admet une limite en a^- et en b^+.

Exemple : Intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.

e) *Terminologie* : $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux ssi elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Exemple : $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}\ t \longmapsto \frac{1}{\lfloor t\rfloor^2}$ est continue par morceaux, et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

f) *Linéarité.* Si les intégrales de f et g convergent, alors celle de $f+g$ aussi. La réciproque est fausse :

Exemple : $\int_0^x \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \int_0^x \frac{dt}{t+1} - \int_0^x \frac{dt}{t+2} = [\ln(\frac{t+1}{t+2})]_0^x \to \ln 2$ en $+\infty$. Mais $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+2} = +\infty$.

g) *Exemple* : Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que l'intégrale de f converge sur $[a,+\infty[$.

$\boxed{\text{L'unique primitive de } f \text{ s'annulant en } +\infty \text{ est } F(x) = \int_{+\infty}^x f(t)\,dt}$.

2) Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions POSITIVES

a) IMPORTANT : Supposons f positive sur $[a,b[$. Alors toute primitive F de f est croissante sur $[a,b[$.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale de } f \text{ converge sur } [a,b[\text{ ssi } F \text{ converge en } b^-, \text{ donc ssi } F \text{ est majorée sur } [a,b[}$.

Sinon, on a $\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt = +\infty$, et on note alors $\int_a^b f(t)\,dt = +\infty$.

Prop : $\boxed{\text{Soit } f : [a,b[\to \mathbb{R} \text{ continue et positive. Alors } \int_a^b f(t)\,dt = 0 \text{ ssi } f \text{ est identiquement nulle}}$.

Preuve : Si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $F(a) = F(b)$, donc F est constante, d'où $f = F' = 0$. Réciproque immédiate.

b) *Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives.*

Principe : Si $0 \le f \le g$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge (car on a $0 \le \int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt$).

Principe : Si $0 \le f \le g$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, c'est-à-dire $\int_a^b f(t)\,dt = +\infty$, alors $\int_a^b g(t)\,dt = +\infty$.

Remarque : En fait, pour étudier la convergence, $\boxed{\text{il suffit d'avoir la positivité et l'inégalité au voisinage de } b^-}$.

<u>*Théorèmes de comparaison.*</u> Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b[$ et positives au voisinage de b^-.

i) $\boxed{\text{Si } f(t) = O(g(t)) \text{ lorsque } t \text{ tend vers } b \text{ et si } \int_a^b g(t)\,dt \text{ converge, alors } \int_a^b f(t)\,dt \text{ converge}}$.

ii) $\boxed{\text{Si } f(t) \sim g(t) \text{ lorsque } t \text{ tend vers } b, \text{ alors } \int_a^b f(t)\,dt \text{ converge ssi } \int_a^b g(t)\,dt \text{ converge}}$.

iii) $\boxed{\text{Si } f(t) \ge g(t) \text{ au voisinage de } b, \text{ et si } \int_a^b g(t)\,dt \text{ diverge (vers } +\infty), \text{ alors } \int_a^b f(t)\,dt \text{ diverge (vers } +\infty)}$.

Preuves : i) On a $f(t) \le Mg(t)$ au voisinage de b. ii) On a $f(t) = O(g(t))$ et $g(t) = O(f(t))$.

c) *Comparaisons avec les intégrales de Riemann.*

- $\boxed{\text{En } +\infty}$: Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et positive au voisinage de $+\infty$.

Si $f(t) \sim_{+\infty} \frac{\lambda}{t^\alpha}$ avec $\lambda > 0$, alors l'intégrale de f converge sur $[a,+\infty[$ ssi $\alpha > 1$.

Si $f(t) = O_{+\infty}(\frac{1}{t^\alpha})$ avec $\alpha > 1$, l'intégrale de f converge sur $[a,+\infty[$.

Si il existe $\lambda > 0$ tel que $f(t) \ge \frac{\lambda}{t}$ pour t assez grand, alors l'intégrale diverge : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$.

- $\boxed{\text{En } b \in \mathbb{R}}$: Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue et positive au voisinage de b^-,c'est-à-dire sur un intervalle $[b-\varepsilon, b[$.

Si $f(t) \sim_{+\infty} \frac{\lambda}{(b-t)^\alpha}$ avec $\lambda > 0$, alors l'intégrale de f converge sur $[a,b[$ ssi $\alpha < 1$.

Si $f(t) = O_{+\infty}(\frac{1}{(b-t)^\alpha})$ avec $\alpha < 1$, l'intégrale de f converge sur $[a,b[$.

Si il existe $\lambda > 0$ tel que $f(t) \ge \frac{\lambda}{b-t}$ pour t assez grand, alors l'intégrale diverge et $\int_a^b f(t)\,dt = +\infty$.

Remarque : Idem si $f :]a,b] \to \mathbb{R}$. On compare $f(t)$ avec une fonction de la forme $\lambda(t-a)^{-\alpha}$.

3) Fonctions intégrables

a) *Def* : On dit que $\boxed{f \text{ est intégrable sur } [a,b[\text{ ssi l'intégrale de } |f| \text{ converge sur } [a,b[}$.

Prop : $\boxed{\text{Si } \int_a^b |f| \text{ converge, alors } \int_a^b f \text{ converge aussi (on dit qu'elle est absolument convergente)}}$.

dem : $0 \le f + |f| \le 2|f|$, donc il existe $\int_a^b (f+|f|)$, donc il existe $\int_a^b f = \int_a^b (f+|f|) - \int_a^b |f|$.

b) *Corollaire du théorème de comparaison* :

Si $f(t) = O_b(g(t))$ et g intégrable sur $[a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.

En effet, $f(t) = O_b(g(t))$ équivaut à $|f(t)| = O_b(|g(t)|)$, et on se raùmène ainsi au cas étudié au 2) b).

4) Exemples d'études de convergence d'intégrales

a) *Exemple* : La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est définie ssi $x > 0$.

En 0^+, $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$, donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge ssi $x - 1 > -1$, c'est-à-dire $x > 0$.

En $+\infty$, $t^{x-1}e^{-t} = O_{+\infty}(t^{-2})$, donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge pour tout x.

b) *Exemple* : $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\ dt$ converge.

Exemple : En 0^+, $f : t \longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité avec $f(0) = \frac{1}{2}$ (donc pas de problème en 0).
En $+\infty$, $f(t) = O_{+\infty}(t^{-2})$. On en conclut que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

c) *Exemple* : $\int_0^1 \ln(\sin x)\ dt$ converge. On a $-\ln(\sin x) = -\ln(x + \mathfrak{o}(x)) = -\ln x + \mathfrak{o}(1) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

d) *Cas particulier d'intégrale de Bertrand.*

Exemple : $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln t}{1+t^2}\ dt$ converge. En 0^+, $\ln t = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et en $+\infty$, $\dfrac{\ln t}{1+t^2} = O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$.

e) *Exemple* : Intégrales de Bertrand**.** On considère $J(\alpha, \beta) = \int_e^{+\infty} f(t)\ dt$, avec $f(t) = \dfrac{1}{(\ln t)^\beta t^\alpha}$.

Si $\alpha > 1$, alors $t^{-\alpha}(\ln t)^{-\beta} = O_{+\infty}(t^{-\alpha+\varepsilon})$ avec $\varepsilon > 0$. On choisit ε de sorte que $\alpha - \varepsilon > 1$. D'où $J(\alpha, \beta) < +\infty$.

Si $\alpha = 1$, $J(\alpha, \beta) = \int_e^{+\infty} (\ln t)^{-\beta}\ d(\ln t) = \int_1^{+\infty} u^{-\beta}\ du$ (avec $u = \ln t$), donc $J(1, \beta) < +\infty$ ssi $\beta > 1$.
Par exemple, $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln \ln t]_e^{+\infty} = +\infty$.

Si $\alpha < 1$, alors $f(t) \geq \frac{1}{t}$ pour t assez grand, donc $J(\alpha, \beta) = +\infty$.

En conclusion, l'intégrale converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). Par exemple, $\int_e^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{dt} < +\infty$ ssi $\alpha > 1$.

5) Intégrations par parties et changements de variables

a) *Intégrations par parties.*

Principe : On intègre par parties sur des segments et on passe aux limites *ensuite*. En effet, les deux termes obtenus peuvent diverger (même si l'intégrale initiale converge). Il est parfois nécessaire de bien choisir la constante d'intégration afin que les deux termes obtenus convergent.

Exemple : On considère la fonction d'Euler $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\ dt$ définie pour tout $x > 0$.
Alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En effet, on a $\int_0^a t^x e^{-t}\ dt = [t^x e^{-t}]_0^a + x \int_0^a t^{x-1} e^{-t}\ dt$, et on fait tendre a vers $+\infty$.

Remarque : Comme $\Gamma(1) = 1$, on obtient en particulier $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ dt = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) *Changements de variables.*

Prop : Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue (par morceaux) et $\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ bijection de classe C^1.
Alors $\int_a^b f(t)\ dt$ converge ssi $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du$ converge, et dans ce cas $\int_a^b f(t)\ dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du$.

Preuve : On passe à la limite la relation vérifiée sur les segments $[a, x]$ et $[\alpha, \varphi^{-1}(x)]$.

Remarque : Contraitement au a), il est donc ici inutile de revenir systématiquement à des segments.

Exemple : On admet $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\ dt = \sqrt{\pi}$ (Gauss). Alors $G = \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u}\ du = \Gamma(\frac{1}{2})$.
On a $G = 2\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\ dt$. Et avec $u = t^2$, c'est-à-dire $t = \sqrt{u}$, on obtient $G = \Gamma(\frac{1}{2})$.

Remarque : Un changement de variable peut transformer une intégrale impropre en une intégrale propre :

Exemple : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n-2}\ du$ (cf intégrales de Wallis) avec $t = \tan u$.

6) Exemples d'intégrale semi-convergente

Def : Si $\int_a^b f(t)\ dt$ converge mais que $\int_a^b |f(t)|\ dt = +\infty$, on dit que l'intégrale est semi-convergente.

Prop : (intégrale de Dirichlet) $\boxed{\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\ dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|\ dt = +\infty}$.

Preuve : $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$, et $\frac{1-\cos t}{t^2}$ intégrable, donc $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$.
D'autre part, $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin t|}{n\pi}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi} = +\infty$.

7) Exemples de calcul d'intégrales

Remarque : Il convient de commencer par justifier la convergence de l'intégrale considérée.

Exemple : Pour $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}\,dt$ converge car $t^n e^{-\alpha t} = O_{+\infty}\left(t^{-2}\right)$, et vaut $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ (intégrations par parties).

Exemple : $\int_0^1 (\ln t)^n\,dt$ converge car $(\ln t)^n = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. En intégrant par parties, $\int_0^1 (\ln t)^n\,dt = (-1)^n n!$

Exemple : $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\int_0^{+\infty}\frac{d(x/c)}{1+(x/c)^2} = \frac{1}{c}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2c}$.

Exemple : $I = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int_0^{+\infty}\frac{2dx}{e^x+e^{-x}} = 2\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2+1} = 2\left[\arctan u\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Exemple : $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ existe car $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ (et de même en -1). On a $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\arcsin t\right]_{-1}^{+1} = \pi$.

Remarque : De façon générale, $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \pi$: il suffit de considérer le changement de variable affine qui permet de paramétrer $[a,b]$ par $[-1,1]$: $t = \frac{a+b}{2} + u\left(\frac{b-a}{2}\right)$, avec $u \in [-1,1]$: $\frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

8) Erreurs fatales

Remarque préliminaire : Expression de l'intégrale d'une fonction *positive* par une série.

Principe : Soient $f : [a,b[\to\mathbb{R}$ continue positive et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $x_0 = a$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$.
Alors $\int_a^b f = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt$ et en particulier l'intégrale converge ssi la série converge.

a) Ne pas confondre la convergence de $\int_a^{+\infty} f$ et la convergence de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exemple : On a $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t} = +\infty$, alors que $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0$.

Exemple : On considère une fonction positive dont le graphe sur $[0,+\infty[$ présente en tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ un pic d'aire 2^{-n} et de hauteur 1. Ainsi, $\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = 1$, alors que la fonction f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Remarque : On peut trouver une variante telle que $\int_0^{+\infty} f < +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(f(n))_{n\in\mathbb{N}} = +\infty$.

b) Si $f(x) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$, avec $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (par comparaison avec Riemann).

En revanche, si on a seulement $f(t) = \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ne converge pas nécessairement.

Exemple : $\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t\ln t} = \left[\ln\ln t\right]_e^{+\infty} = +\infty$.

9) Cas des fonctions positives décroissantes

Exercice : Soit $f : [0,+\infty[$ positive décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f < +\infty$. Alors $f(x) = \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution : On a $0 \leq \frac{1}{2}xf(x) \leq \int_{x/2}^x f(t)\,dt \leq \int_{x/2}^{+\infty} f(t)\,dt$. Or, $\lim_{x\to+\infty}\int_{x/2}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

Remarque : Sans l'hypothèse de décroissance, la propriété est fausse (cf paragraphe précédent).

10) Critère de convergence d'une fonction de classe C^1

IMPORTANT : $\boxed{\text{Si } f : [a,+\infty[\to\mathbb{R} \text{ est de classe } C^1\text{, alors } \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe ssi } \int_a^{+\infty} f'(t)\,dt \text{ converge}}$.

En effet, $\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ ssi il existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exemple : Supposons $\int_0^{+\infty} f$ et $\int_0^{+\infty} f'$ convergentes. Alors f converge vers 0 en $+\infty$.
En effet, comme $\int_0^{+\infty} f'$ converge, alors f converge en $+\infty$. Posons $\lambda = \lim_{+\infty} f$.
Si $\lambda \neq 0$, alors l'intégrale de f divergerait (car l'intégrale de $x \longmapsto \lambda$ diverge). Donc $\lambda = 0$.