$\boxed{\text{Familles sommables et sommes indexées par une partie dénombrable}}$

1) Commutativité

Lemme : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ une série $\boxed{\text{absolument convergente}}$.

$\boxed{\text{Pour toute permutation } \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \text{ Autrement dit, l'ordre des termes n'intervient pas}}$.

Remarque : En raisonnant avec les $|a_n|$, on a en particulier $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|a_{\sigma(n)}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Corollaire : Soit E un ensemble dénombrable et $(a_n)_{n\in E}$ une famille de réels indexée par E.

On suppose qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$ pour laquelle la série $\sum_{m=0}^{+\infty} \left|a_{f(m)}\right|$ converge. Alors, pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to E$, la somme $\sum_{m=0}^{+\infty} \left|a_{\sigma(m)}\right|$ converge et la valeur de $\sum_{m=0}^{+\infty} a_{\sigma(m)}$ ne dépend pas de σ.

On note $\sum_{n\in E} a_n$ cette valeur commune, appelée somme de la famille $(a_n)_{n\in E}$.

Terminologie : On dit que la famille $(a_n)_{n\in E}$ est sommable lorsque $\sum_{n\in E} |a_n|$ converge.

2) Regroupement par paquets

Soit E un ensemble au plus dénombrable, et $E = \bigcup_{i\in I} E_i$ une partition de E, avec I au plus dénombrable.

Prop : Soit $(a_n)_{n\in E}$ une famille. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $(a_n)_{n\in E}$ est sommable, c'est-à-dire $\sum_{n\in E} |a_n|$ converge.

(ii) Pour tout $i \in I$, la famille $(a_n)_{n\in E_i}$ est sommable, et $\sum_{i\in I} \left(\sum_{n\in E_i} |a_n|\right)$ converge.

$\boxed{\text{Dans ce cas, on a } \sum_{n\in E} a_n = \sum_{i\in I} \left(\sum_{n\in E_i} a_n\right)}$.

3) Sommes doubles et théorème de Fubini

Prop : Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une série. $\boxed{\text{Si } \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}| < +\infty, \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}}$.

Preuve : Il s'agit d'un cas particulier de regroupements par paquets de $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}$.

En effet, on prend ici $E = \mathbb{N}^2$. On a d'une part E réunion disjointe des $E_n = \{(n,m),\ m \in \mathbb{N}\}$, et on a d'autre part E réunion disjointe des $E'_m = \{(n,m),\ n \in \mathbb{N}\}$. Autrement dit, on regroupe d'une part par colonnes et d'autre part pas lignes.

Ainsi, $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}$.

4) Exemples

a) La somme double $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{1}{(n+m+1)^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 2$.

En effet, $S_n = \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+m+1)^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$, et $S_n \sim \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$, donc $\sum S_n$ covnerge ssi $\alpha > 2$.

b) Pour $|x| < 1$, la somme double $\sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} x^a x^{2b}$ vaut $\left(\sum_{a=0}^{+\infty} x^a\right)\left(\sum_{b=0}^{+\infty} x^{2b}\right) = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x^2}$.

D'autre part, $\sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} x^a x^{2b} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où c_n est le nombre de couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + 2b = n$.

Ainsi, c_n est le coefficient en x^n du DSE de $F(x) = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}\dfrac{1}{(1+x)}$.

c) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Supposons par l'absurde que $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$ est fini.

Alors $\prod_{p\in P} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = \prod_{i=1}^{r} \sum_{m_i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{p_i^{m_i}} = \sum_{(m_1,...,m_r)\in\mathbb{N}^r} \dfrac{1}{p_1^{m_1}...p_r^{m_r}}$.

Or, tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de façon unique sous la forme $n = p_1^{m_1}...p_r^{m_r}$.

Donc $\prod_{p\in P} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$, ce qui contredit $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$. On en déduit que $\mathcal{P}$ est infini.

Remarque : On en déduit aussi que $\prod_{p\in P} \left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{-1} = +\infty$.

Comme $\ln\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{-1} \sim \dfrac{1}{p}$, on en déduit par comparaison entre séries à termes positifs que $\sum_{p\in P} \dfrac{1}{p} = +\infty$.

5) Exercices

a) Calculer $\sum_{n>m\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)m}$.

Solution : Ici; tpus les termes sont positifs.

On a $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)m}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \dfrac{1}{m}\left(\sum_{n=m+1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \dfrac{1}{m(m+1)}$.

Et $\sum_{m=1}^{+\infty} \dfrac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1}\right) = 1$.

Donc la famille $\left(\dfrac{1}{n(n+1)m}\right)_{n>m\geq 1}$ est sommable de somme 1.

b) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties d'un ensemble dénombrable E telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = E$.

Soit $(x_n)_{n\in E}$ une famille sommable. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n\in A_k} x_n = \sum_{n\in E} x_n$.

Solution : E est la réunion disjointe des $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$, avec $j \in \mathbb{N}$, en posant $A_{-1} = \emptyset$.

Par la propriété de regroupement par paquets, on a : $\sum_{n\in E} x_n = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{n\in B_j} x_n$.

Or, $\sum_{j=0}^{k} \sum_{n\in B_j} x_n = \sum_{n\in A_k} x_n$, car A_k est la réunion disjointe des B_j, avec $0 \leq j \leq k$.

On a donc par définition de la somme d'une série : $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n\in A_k} x_n = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{n\in B_j} x_n = \sum_{n\in E} x_n$.

c) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit $x > 1$. Montrer que

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\frac{1}{1-p^x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Indication : On pose $\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_k, ...\}$.

On note A_k l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls de la forme $n = (p_1)^{m_1}...(p_k)^{m_k}$.

Montrer d'abord que $\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{1}{1-p_j^x}\right) = \sum_{n\in A_k} \dfrac{1}{n^x}$.