Ensembles finis et ensembles dénombrables

1) Définitions

Def : On dit que E est fini de cardinal n ssi il existe une bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ sur E, c'est-à-dire ssi on peut énumérer les éléments de E par une suite indexée de 1 à n.

Def : On dit que E est dénombrable ssi il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E, c'est-à-dire ssi on peut énumérer les éléments de E par une suite indexée par $\mathbb{N}$, autrement dit ssi il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts tels que $E = \{u_n,\ \ n \in \mathbb{N}\}$.

Remarques :

- S'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$, alors E est un ensemble dénombrable.

En effet, si $f : E \to \mathbb{N}$ est bijective, alors f^{-1} est bijective.

- S'il existe une bijection de E sur un ensemble dénombrable F, alors E est dénombrable.

En effet, si $f : E \to F$ est bijective et $g : \mathbb{N} \to F$ sont bijectives, alors $f^{-1} \circ g : \mathbb{N} \to E$ est bijective.

2) Exemples

Prop **:** $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

Preuve : On considère $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*\ \ n \longmapsto n+1$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ \ n \longmapsto \frac{n}{2}$ si n est pair et $-\frac{n+1}{2}$ si n est impair.

Enumération de $\mathbb{Z}$:

$\dots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$\dots$
			u_7	u_4	u_3	u_1	u_0	u_2	u_4	u_6	u_8			

Prop : Toute partie de $\mathbb{N}$ (et plus généralement d'un ensemble dénombrable) est finie ou dénombrable.

Rappel : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (*propriété de bon ordre*).

Preuve : Soit $A \subset \mathbb{N}$ infinie. On note u_n le n-ième plus petit élément de A (qui existe car A est infinie). Autrement dit, on définit par récurrence forte $u_0 = \min A$, $u_1 = \min(A \setminus \{u_0\})$, $u_2 = \min(A \setminus \{u_0, u_1\})$, etc ...

On justifie pour conclure alors que tout élément x de A est de la forme u_n : sinon, on aurait $u_n < x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde, car on a nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (les parties de $\mathbb{N}$ infinies sont exactement les parties non majorées).

Conséquences :

i) Pour prouver que A est finie ou dénombrable, il suffit de trouver une injection f de A dans $\mathbb{N}$.

En effet, f induit une bijection de A sur $f(\mathbb{N})$, qui est finie ou dénombrable.

ii) Pour prouver que A est finie ou dénombrable, il suffit de trouver une surjection g de $\mathbb{N}$ sur A.

En effet, en choisissant pour tout élément $x \in A$ un antécédent par g qu'on note $f(x)$, on obtient une injection $f : A \to \mathbb{N}$ et ainsi A est finie ou dénombrable (*remarque* : on peut dire aussi "au plus dénombrable").

Prop **:** $\mathbb{N}^2$ est dénombrable

Preuve : L'application $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*\ \ (n, m) \mapsto 2^n(2m+1)$ est bijective (car tout entier naturel non nul s'écrit de façon unique comme produit d'un entier impair et d'une puissance de 2).

Autre preuve : Enumération de $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & u_0 & u_2 & u_5 & u_8 & \\ 1 & u_1 & u_4 & u_8 & & \\ 2 & u_3 & u_7 & \nearrow & & \\ 3 & u_6 & u_{11} & & & \\ 4 & u_{10} & & & & \end{array}$$

Ainsi, $u_0 = (0,0)$, $u_1 = (1,0)$, etc ...

Corollaire : Si E et F sont denombrables, alors $E \times F$ est dénombrable. Par exemple, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Remarque : On en déduit que $\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dénombrable}}$ (comme partie infinie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec $\frac{p}{q} \leftrightarrow (p,q)$).

Corollaire : Si les E_i sont dénombrables pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ est dénombrable.

Preuve : Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une bijection $f_i : \mathbb{N} \to E$.

On considère $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \quad (i,j) \longmapsto f_i(j)$. Alors f est surjective, donc E est dénombrable (car infini).

3) Ensembles finis ou dénombrables

Prop : Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

Prop : Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est fini ou dénombrable.

4) Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Exercice : On se propose de prouver que $\boxed{\mathbb{R} \text{ n'est pas dénombrable}}$.

On suppose par l'absurde qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts deux à deux tels que $\mathbb{R} = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Construire une suite de segments emboités $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin [a_n, b_n]$. Conclure.

b) On propose une seconde preuve, en supposant connu le développement décimal des nombres réels.

Construire un nombre réel x dont le développement décimal diffère de ceux des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication : On choisit la n-ième décimale de x de sorte qu'elle diffère de la n-ième décimale de u_n.

Remarque : En fait, cette preuve peut être vue comme un cas particulier de la preuve de a).

Solution **:**

a) On choisit $[a_0, b_0]$ qui ne contient pas u_0.
Supposons construit $[a_n, b_n]$. On peut trouver un sous intervalle de $[a_n, b_n]$ qui ne contient pas u_{n+1}.
On peut par exemple couper $[a_n, b_n]$ en trois, et alors au moins un des trois segments obtenus convient.
On obtient ainsi une suite de segments $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (pour l'inclusion) et telle que $u_n \notin [a_n, b_n]$.
De plus, $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}(b_0 - a_0)$, donc $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.
Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers la même limite L.
On a $\forall n \in N$, $a_n < L < b_n$, donc $L \in [a_n, b_n]$ et a fortiori, $L \neq u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'énumère pas R.

b) On choisit la n-ième décimale de x de sorte qu'elle diffère de la n-ième décimale de u_n.
Il faut faire attention à ne pas obtenir de suite stationnaire en 9. En effet, on a par exemple $1,00000... = 0.999999...$
Ainsi, on obtient un réel x tel que $\forall n \in N$, $x \neq u_n$ (car chaque réel est caractérisé par son développement décimal).

$\boxed{\text{Familles sommables}}$

1) Somme d'une famille de réels POSITIFS indexée par un ensemble fini ou bénombrable

a) *Définition et prop* **:**

Soit I un ensemble dénombrable (ou fini) et $(x_i)_{i\in I}$ une famille *de réels positifs* indexée par I.

Il existe donc une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$. On définit alors $\boxed{\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)} \in [0, +\infty]}$.

Cette définition est valide **car la valeur de $\sum_{i\in I} x_i$ ne dépend pas du choix de** φ (cf lemme suivant).

Lemme : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ une série de réels positifs convergente.

On se propose de prouver que pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a $\sum_{m=0}^{+\infty} a_{\sigma(m)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $T_m = \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)}$. On pose $L = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour m assez grand, on a : $S_n \le T_m \le L$.

(ii) $\lim_{m\to+\infty} T_m = L$.

Preuve du lemme **:**

(i) Pour m assez grand, $\{\sigma(k) \mid 0 \le k \le m\}$ contient $\{0, 1, 2, ..., n\}$, et on a donc $S_n \le T_m$.

Il suffit en effet de prendre $m \ge m_0 = \max_{0\le k\le n}(\sigma^{-1}(k))$. Donc pour tout $m \ge m_0$, $S_n \le T_m$.

D'autre part, pour tout $m \in N$, on a $T_m \le S_N$, où $N = \max_{0\le k\le m}(\sigma(k))$. Donc $T_m \le S_n \le L$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in N$ tel que $L - \varepsilon \le S_n \le L$.

Par (i), pour m assez grand, on a $L - \varepsilon \le S_n \le T_m \le L$, donc $L - \varepsilon \le T_m \le L$. On en conclut $\lim_{m\to+\infty} T_m = L$.

b) *Théorème de Fubini* : Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. On a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m}\right) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Idée de la preuve : On pose $S_{n,m} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right)$ sommes finies.

Il faut donc montrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty} S_{n,m}\right)$ existe et vaut $S = \lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} S_{n,m}\right)$.

L'existence des $\lim_{m\to+\infty} S_{n,m}$ résulte de $S_{n,m} \le S_{\infty,m} \le S$, et on a donc $S' = \lim_{n\to+\infty} S_{n,\infty} \le S$.

En inversant les rôles, on obtient donc de même $S \le S'$.

c) *Sommations par paquets* : Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} \qquad \text{dans } \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

On pose $S_{n,m} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{0\le i\le n, 0\le j\le m} a_{i,j}$.

On a $T = \lim_{n\to+\infty} S_{n,n} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}$ en considérant une énumération de $\mathbb{N}^2$ en ordonnant les couples d'entiers $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ selon la valeur croissante de $(i+j)$.

Il reste à prouver que T est égal à $S = \lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} S_{n,m}\right) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} S_{n,m}\right)$.

Fixons m. On a $\forall n \ge m$, $S_{n,m} \le S_{n,n} \le S_{n,\infty}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} S_{n,m} \le T \le S$.

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient $S \le T \le S$, c'est-à-dire $T = S$.

d) *Propriétés* **:** On reprend les notations précédentes.

- $\sum_{i\in I} x_i$ vaut 0 ssi tous les x_i sont nuls.
- Pour toute partition de $I = \sqcup_{k\in K} I_k$ de I, on a $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)$.

En particulier, $\sum_{i\in I} x_i$ est finie ssi pour tout $k \in J$, $\sum_{i\in I_k} x_i$ est finie et $\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)$ est finie.

- Si J est une partie de I, $\sum_{i\in J} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i$.

Remarque : La propriété des partitions résulte de c) : en considérant $\varphi_k : \mathbb{N} \to I_k$ et $K = \mathbb{N}$, on a :
$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} x_{\varphi_k(n)}$ et $\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi_k(n)}\right)$.

2) Familles sommables de réels positifs

a) *Définition et prop* : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I, où I est dénombrable (ou fini).

On dit que $\boxed{(x_i)_{i\in I} \text{ est sommable ssi } \sum_{i\in I} |x_i| < +\infty}$.

Pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\varphi(n)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ ne dépend pas de φ.

La somme est notée $\sum_{i\in I} x_i$, appelée somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

b) *Propriétés* (admises) :

- *Ordre* : Si $|x_i| \leq |y_i|$ et $(y_i)_{i\in I}$ sommable, alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, et $\left|\sum_{i\in I} x_i\right| < \sum_{i\in I} |y_i|$.

- *Linéarité* : L'ensemble des familles sommables indexées par I forment un sev.

L'application qui à une famille $(x_i)_{i\in I}$ associe la somme $\sum_{i\in I} x_i$ est linéaire.

- *Sommation par paquets* : Soit une partition de $I = \sqcup_{k\in K} I_k$ de I.

Alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ssi les $(x_i)_{i\in I_k}$ sont sommables et si $\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)_{k\in K}$ est sommable.

On a alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)$.

- *Théorème de Fubini* : Soient I et J deux ensembles dénombrables (ou finis).

Soit $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels indexée par $I \times J$ (qui est dénombrable ou finie).

Alors $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable ssi $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} |x_{ij}|\right) < +\infty$.

Dans ce cas, on a : $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{ij}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{ij}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_{ij}$.

- *Cas particulier de Fubini* :

Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont sommables, alors $\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i y_j$.

Remarque : Les preuves résultent du théorème de convergence absolue et du théorème de convergence dominée pour les séries (permettant de passer à la limite sous le signe $\sum$).

3) Exemples

a) *Produit de Cauchy de deux séries*

Prop : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

Preuve : Par Fubini, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j$.

On considère la partition $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$, où $\Delta_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = n\}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{(i,j)\in\Delta_n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = c_n$.

Par sommation par paquets, $\sum c_n$ converge et $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

b) *Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète*

Soit une variable aléatoire $X : (\Omega, P, \mathcal{T}) \to E$, où E est une partie dénombrable (ou finie) de $\mathbb{R}$.

On dit que X est d'espérance finie ssi $\sum_{x\in E} |x|\, P(X = x)$ converge.

Autrement dit, X est d'espérance finie ssi la famille $(xP(X = x))_{x\in E}$ est sommable.

On définit alors $E(X) = \sum_{x\in E} xP(X = x)$.

c) Considérons $A = \{2^i 3^j,\ (i,j) \in \mathbb{N}^2\}$.

Par le cas particulier de Fubini, $\sum_{n\in A} \dfrac{1}{n} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{1}{2^i}\dfrac{1}{3^j} = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^i}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{3^j}\right) = \dfrac{2}{1}\dfrac{3}{2} = 3.$

d) Considérons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{3^{\lfloor \log n \rfloor}}$, où $\log n$ est le logarithme de n en base 2.

On pose $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor \log n \rfloor = p\} = [\![2^p, 2^{p+1} - 1]\!]$.

Par sommation par paquets, $S = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n\in A_p} \dfrac{1}{3^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{2^{p+1} - 2^p}{3^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{2^p}{3^p} = 3.$