

Mines 2016 - Maths 2

Un corrigé

A. Exemples

1. Le polynôme caractéristique de D est

$$\chi_D = X^2 + 1$$

Il n'a aucune racine réelle et le spectre réel de D est vide. En particulier D n'a aucune valeur propre réelle non nulle et D est \mathbb{R} -quasi-nilpotente.

Le spectre complexe de D est $\{i, -i\}$ et contient au moins un élément non nul donc D n'est pas \mathbb{C} -quasi-nilpotente.

2. Le polynôme caractéristique de B est

$$\chi_B = X^2 - \text{Tr}(B)X + \det(B) = X^2$$

Ainsi, le spectre complexe de B est $\{0\}$ et ne contient aucun élément non nul. B est \mathbb{C} -quasi-nilpotente.

3. $S_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M - M^T$ et est un sous-espace. $A_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M + M^T$ et est un sous-espace. $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est non vide (il contient 0) et est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous-espace de $M_n(\mathbb{K})$.

Montrons que

$$S_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}((E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}, (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n})$$

- L'inclusion réciproque est vraie car les $E_{i,j} + E_{j,i}$ et $E_{i,i}$ sont symétriques et car $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace.
- Soit $S \in S_n(\mathbb{K})$. On a

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^n s_{i,i}E_{i,i} \in \text{Vect}((E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}, (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n})$$

On a donc aussi l'inclusion directe.

On remarque ensuite que la famille $((E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}, (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n})$ est libre (on considère une combinaison linéaire nulle et on a immédiatement la nullité des coefficients). Il reste alors à compter le nombre des éléments de cette famille qui est une base de $S_n(\mathbb{K})$:

$$\dim(S_n(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^n (n-i) + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et donc $\forall T \in T_n^{++}(\mathbb{K})$, $\text{Sp}(T) = \{0\}$. Ceci montre que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent. Comme en question précédente, on montre que

$$T_n^{++}(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n)$$

La famille étant libre, c'est une base et

$$\dim(T_n^{++}(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^n (n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$$

5. Notons que si $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T Y$ peut s'interpréter comme le produit scalaire $(X|Y)$ de X et Y vus comme éléments de \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$X^T A X = (X|A X) = (A X|X) = (A X)^T X = X^T A^T X = -X^T A X$$

On en déduit donc que $X^T A X = 0$. En particulier, si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé alors

$$0 = X^T A X = \lambda \|X\|^2$$

et comme $X \neq 0$ (vecteur propre), $\lambda = 0$. 0 est donc la seule valeur propre réelle possible pour A . On a montré que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent.

6. Comme $n \geq 2$, on peut considérer la matrice M définie par blocs par $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

On a

$$\chi_M = X^{n-2} \chi_D = X^{n-2} (X^2 + 1)$$

et le spectre complexe de M est soit égal à $\{i, -i\}$ (cas $n = 2$) soit égal à $\{0, i, -i\}$ (cas $n \geq 3$). Si, par l'absurde, il existait une matrice P comme dans l'énoncé, M serait semblable dans \mathbb{R} à un élément de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc à une matrice dont 0 est la seule valeur propre complexe. La similitude dans \mathbb{R} entraînant immédiatement celle dans \mathbb{C} ($GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$) et le spectre étant un invariant de similitude, on obtient une contradiction.

Il n'existe donc pas de P comme dans l'énoncé.

B. Cas réel

7. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. S est alors diagonalisable (théorème spectral). Si 0 est sa seule valeur propre réelle possible, S est alors semblable à une matrice diagonale nulle et est donc nulle. Réciproquement, 0 est symétrique et quasi-nilpotente. La matrice nulle est ainsi la seule matrice symétrique quasi-nilpotente. La question 2 montre que le résultat est faux dans le cas complexe (on a trouvé une matrice symétrique complexe quasi-nilpotente qui n'est pas nulle).
8. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente $V \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ et donc V et $S_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe. Ainsi

$$\dim(V) \leq \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

C. Lemme des colonnes

9. La seule matrice quasi-nilpotente de $M_1(\mathbb{K})$ est la matrice nulle (puisque une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient). Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas $n = 1$.
10. Un calcul de déterminant par blocs montre que si $M \in V'$ alors

$$\chi_M = X \chi_{K(M)}$$

Les valeurs propres non nulles de $M \in V'$ et celles de $K(M)$ sont donc les mêmes. Si V' est quasi-nilpotent alors $K(V')$ l'est aussi.

11. D'après l'hypothèse de récurrence appliqué à $K(V')$ (sous-espace de $M_{n-1}(\mathbb{K})$), il existe un élément $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $C_j(K(V')) = \{0\}$. D'après l'hypothèse de l'absurde, il existe une matrice M non nulle dans $C_j(V)$. Comme $j < n$, $M \in V'$ et donc $K(M) \in K(V')$. Comme $M \in C_j(V)$, on a aussi $K(M)$ qui a toutes ses colonnes nulles saus peut-être la j -ème. Finalement, $K(M) \in C_j(K(V'))$ et donc $K(M) = 0$.

M a ainsi une unique colonne qui peut être non nulle (celle numéro j) et seul le dernier coefficient de cette colonne peut être non nul.

Comme $M \neq 0$, il existe $c \neq 0$ tel que $M = cE_{n,j}$. Enfin, V' est un sous-espace vectoriel et $E_{n,j} = M/c \in V' \subset V$.

12. u_σ transforme la base (e_1, \dots, e_n) en $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ qui est aussi une base. Cette application linéaire est donc un isomorphisme de \mathbb{K}' .

$(u_\sigma)^{-1}$ envoie $e_{\sigma(i)}$ sur e_i pour tout i et donc e_k sur $e_{\sigma^{-1}(k)}$ pour tout k . On a donc

$$(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$$

13. La colonne j de la matrice de u_σ dans la base canonique est la colonne $e_{\sigma(j)}$. Elle a tous ses coefficients nuls sauf celui en ligne $\sigma(j)$. Son coefficient générique est donc $\delta_{i,\sigma(j)}$. On a donc

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u_\sigma) = P_\sigma$$

On en déduit que P_σ est inversible et que

$$(P_\sigma)^{-1} \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u_\sigma^{-1}) = P_{\sigma^{-1}} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{1 \leq i, j \leq n} = (\delta_{\sigma(i), j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

14. Soit g l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à M . P_σ étant la matrice de changement de base de (e_i) à $(e_{\sigma(i)})$, d'après la formule de changement de base,

$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = \text{Mat}_{(e_{\sigma(i)})}(g)$$

Le coefficient à l'intersection des colonne j et ligne i est la coordonnée sur $e_{\sigma(i)}$ de $g(e_{\sigma(j)})$. Or,

$$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^n m_{k,\sigma(j)} e_k = \sum_{l=1}^n m_{\sigma(l),\sigma(j)} e_{\sigma(l)}$$

Finalement,

$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = (m_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$$

15. V^σ est l'image de V par l'application linéaire $M \mapsto P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ et c'est donc un espace vectoriel. Le spectre étant un invariant de similitude, le caractère quasi-nilpotent des éléments de V entraîne celui de ceux des éléments de V^σ et V^σ est un sous-espace quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$.

Enfin, fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après l'hypothèse de l'absurde, on peut trouver M non nulle dans $C_{\sigma(k)}(V)$. On a en particulier $m_{l,c}$ qui est nul si $c \neq \sigma(k)$ ce que l'on peut écrire $m_{\sigma(l),\sigma(c)} = 0$ si $\sigma(c) \neq \sigma(k)$ ou encore si $c \neq k$. La matrice $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ est donc dans $C_k(V^\sigma)$. Elle est non nulle car M l'est (et $A \mapsto P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ est un isomorphisme). On a montré que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$$

16. V^σ et V ont les mêmes propriétés (sous-espaces quasi-nilpotents tels que pour tout k , $C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$). Pour tout σ , on peut donc appliquer la question 11 à V^σ et dire qu'il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $E_{n,k} \in V_\sigma$ ou encore que $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} \in V$.

D'après la question 14, pour tout choix de σ on a $P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma = E_{\sigma^{-1}(u),\sigma^{-1}(v)}$ (en effet en notant $N = P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma$, on a $N_{i,j}$ qui est égal au coefficient $(\sigma(i), \sigma(j))$ de $E_{u,v}$ et est nul sauf si $\sigma(i) = u$

et $\sigma(j) = v$.

En appliquant ceci avec σ^{-1} , on a donc $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n),\sigma(k)}$.

Fixons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Appliquons ceci avec σ la bijection qui se contente de permuter j et n en laissant les autres éléments invariants (c'est l'identité si $j = n$). On trouve alors $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $E_{\sigma(n),\sigma(k)} = E_{j,\sigma(k)} \in V$. On a bien sûr $\sigma(k) \neq j$ car $k \neq n$ et σ est une bijection qui envoie déjà n sur j .

On a prouvé que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists f(j) \neq j / E_{j,f(j)} \in V$$

17. Posons $i_1 = 1$ et, pour tout $k \geq 2$, $i_k = f(i_{k-1})$. L'ensemble $\{i_k / k \in \mathbb{N}^*\}$ est inclus dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et donc fini. Or, \mathbb{N}^* est infini. Il existe donc deux i_k égaux pour des valeurs de k différentes : $i_a = i_b$ avec $a < b$. En partant de i_a et en itérant successivement par f , on finit par retomber sur i_a . On regarde la première fois où on retrouve i_a et ce n'est pas à la première itération car $f(j) \neq j$ pour tout j . On trouve des indices $i_a, i_{a+1}, \dots, i_{a+p-1}$ avec $p \geq 2$ deux à deux distincts images successifs les uns des autres par f et avec $f(i_{a+p-1}) = f(i_a)$. En posant $j_1 = i_a, j_2 = i_{a+1}, \dots, j_p = i_{a+p-1}$, on a des éléments deux à deux distincts et

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, f(j_k) = j_{k+1} \text{ et } f(j_p) = j_1$$

18. On applique le procédé décrit ci-dessus. On gère un tableau \mathbf{t} de booléens à $n+1$ case numéroté à partir de 0 et dont la case 0 sera inutile (mais cela permet de respecter la notation python). Initialement toutes les cases valent `False`. On part de 1 et on pose `t[1]=True` puis on calcule $f(1)$ et on regarde, grâce au tableau \mathbf{t} , si cette valeur a déjà été détectée. Si c'est le cas, cela signifie que l'on a un cycle de $f(1)$ à lui même. Sinon, on met la valeur `True` dans `t[f(1)]` (on a rencontré l'élément $f(1)$) et on recommence avec $f(1)$ en calculant donc $f(f(1))$. On gère ainsi une variable i qui prend successivement les valeurs $1, f(1), \dots$.

```
t=[False]*(n+1)
i=1
while not(t[f(i)]):
    t[f(i)]=True
    i=f(i)
```

A ce niveau, il y a une boucle de i vers lui même quand on itère par f et il suffit de partir de i et d'itérer en stockant jusqu'à retomber sur i .

```
l=[i]
k=f(i)
while k!=i:
    l.append(k)
    k=f(k)
return(l)
```

19. N est une matrice comportant p valeurs non nulles qui sont égales à 1. Il y a un coefficient 1 sur chaque ligne j_1, \dots, j_p et aussi un sur chaque colonne $f(j_1), \dots, f(j_p) = j_2, \dots, j_p, j_1$. On en déduit que le vecteur $\sum_{k=1}^p e_{j_k}$ est propre pour N associé à la valeur propre 1. Ceci est contradictoire car $N \in V$ (comme somme d'éléments de V qui est un espace vectoriel) et ne devrait posséder aucune valeur propre non nulle. Ceci clôt le raisonnement par l'absurde.

D. Cas général

20. Considérons l'application $\Phi : M \in V \mapsto (K(M), L(M))$. Si $\Phi(M) = 0$ alors $L(M) = 0$ et $K(M) = 0$. Or $C_n(V) = 0$ et ces conditions impliquent donc que $M = 0$. Le noyau de Φ est égal à $\ker(K) \cap \ker(L)$ et Φ (qui est linéaire) est injective. On a ainsi

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(\Phi)) = \dim(\Phi(V))$$

On peut trouver un supplémentaire W' de W dans V et on a (par injectivité de Φ)

$$\Phi(V) = \Phi(W) \oplus \Phi(W')$$

On a $\Phi(W) = \{(K(M), L(M)) / M \in W\} = \{(K(M), 0) / M \in W\}$ qui est isomorphe à $K(W)$ et donc de même dimension.

$W = \ker(L)$ et par théorème du rang, W' est isomorphe à $L(V)$ qui est de dimension $\leq n - 1$. $\Phi(W')$ qui est isomorphe à W' est donc aussi de dimension $\leq n - 1$. Finalement,

$$\dim(V) = \dim(\Phi(V)) \leq \dim(K(W)) + n - 1$$

21. Soit $M \in W$; on a $M = \begin{pmatrix} K(M) & R(M) \\ 0 & a(M) \end{pmatrix}$ qui est quasi nilpotente (car dans V) et ses valeurs propres sont celles de $K(M)$ et $a(M)$. Ainsi $K(M)$ n'a pas de valeur propre non nulle (et $a(M) = 0$). Ceci montre que l'espace vectoriel $K(W)$ est quasi-nilpotent. D'après l'hypothèse de récurrence, sa dimension est plus petite que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
La question précédente donne alors

$$\dim(V) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

22. D'après le lemme des colonnes, il existe j tel que $C_j(V) = \{0\}$. Considérons la permutation σ qui échange j et n . V^σ est alors isomorphe à V et est un espace vectoriel quasi-nilpotent auquel on peut appliquer le cas précédent. On a donc

$$\dim(V) = \dim(V^\sigma) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$