

Centrale PSI 1 2024

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(\cos t - 1)dt$. L'intégrande est une fonction négative, continue, non identiquement nulle, donc $W_{n+1} - W_n < 0$. Ainsi, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2. Effectuons une intégration par parties avec les deux fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t^{n+1}$. On obtient

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin'(t) \cos^{n+1}(t) dt = \left[\sin(t) \cos(t)^{n+1} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t)(n+1)(-\sin(t)) \cos^n(t) dt$$

En utilisant $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, la linéarité de l'intégrale et l'annulation du crochet, on trouve $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, ce qu'on souhaitait démontrer.

3. Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$. On a alors $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1} = u_n$ d'après la question précédente. La suite (u_n) étant constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)W_n W_{n+1} = u_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$ (car $W_0 = \frac{\pi}{2}, W_1 = 1$, par calcul direct).
4. La suite (W_n) est à valeurs strictement positives (par un argument similaire à la question 1), et par stricte décroissance, on a $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$ pour tout n , donc $\frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$. Mais d'après la question 2, la quantité de gauche vaut $\frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 en l'infini. Par encadrement, on a donc $W_{n+1} \sim W_n$. En reportant dans la question 3, on a donc $(n+1)W_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$, soit en divisant puis en utilisant que $W_n > 0$, l'équivalent souhaité

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

5. $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $x \mapsto e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$, qui est intégrable, donc elle l'est aussi.
6. On réécrit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) dx$$

et on applique le théorème de convergence dominée :

- $x \mapsto \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) dx$ est continue par morceaux et intégrable car nulle sur $]\sqrt{n}, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) \right| \leq e^{n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \leq e^{-x^2}$$

par concavité de $\ln$. Le terme de droite est intégrable par la question précédente.

- Limite simple : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$$

$$\text{car } n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \sim -x^2.$$

Par convergence dominée,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = I$$

7. Le changement indiqué

$$\begin{cases} x = \sqrt{n} \sin(u) \\ dx = \sqrt{n} \cos(u) du \end{cases}$$

est licite car $\sin$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et il donne

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{n \sin^2(u)}{n}\right)^n \sqrt{n} \cos(u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^{2n+1} du = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

8. On en déduit par l'équivalent vu en 4) que

$$I \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Et enfin par parité

$$\boxed{J = 2I = \sqrt{\pi}}$$

9. Je pense qu'il y a une erreur dans le sujet, il faut lire « sur $\mathbb{R}$ » pour l'équation différentielle et pour les solutions développables en série entière.

Soit donc $y: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de rayon de convergence $R = +\infty$. En dérivant terme à terme sur $] - R, R[$ on obtient

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

L'équation différentielle (II.1) devient alors

$$a_1 x^0 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+2) a_{n+2} + a_n] x^{n+1} = 0$$

Par unicité des coefficients d'une série entière on obtient donc que (II.1) est équivalente à

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0 \end{cases} \quad (\text{R})$$

• Analyse : si y vérifie (R) alors on montre par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{\prod_{k=1}^n (2k)^2} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2} \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 0}$$

(récurrence à faire par le candidat, c'est la première... le correcteur se permet de la zapper en revanche!)

- Synthèse : pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite définie dans l'encadré ci-dessus vérifie bien (R) et de plus comme $|a_n| \leq \frac{|a_0|}{n!}$ alors y est bien de rayon de convergence $+\infty$ par comparaison.

En conclusion les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ sont celles dont la suite des coefficients vérifie l'encadré ci-dessus.

10. Avec les notations ci-dessus, $y(0) = 1$ équivaut à $a_0 = 1$. La suite des coefficients est alors entièrement déterminée par la formule encadrée, ce qui laisse cette unique solution

$$y: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

11. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètre. On note pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, $f(x, t) = \cos(x \sin(t))$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0, \pi]$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t))$ est intégrable sur le segment $[0, \pi]$ car continue.
- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = \left| -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)) \right| \leq 1$$

et cette domination est intégrable sur le segment $[0, \pi]$.

On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on peut la dériver sous le signe intégral.

12. On obtient donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin(t) \sin(x \sin(t)) dt$$

$$G''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)) dt$$

Et donc

$$\begin{aligned} xG''(x) + G'(x) + xG(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(-x \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos(x \sin(t)) \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(x(1 - \sin^2(t)) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) \right) dt \\ &= \int_0^\pi x \cos^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} [\cos(t) \sin(x \sin(t))]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

13. Comme $G(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 dt = 1$.

Pour répondre à la question il ne reste plus qu'à montrer que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ceci conclura par l'unicité qu'on vient de démontrer à la question précédente.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, \pi]$,

$$\cos(x \sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt \right) x^{2n} \quad (D)$$

Justification de l'interversion somme intégrale : pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la série de fonctions

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!}$$

converge uniformément sur le segment $[0, \pi]$ car elle y converge normalement puisque

$$\left\| t \mapsto (-1)^n x^{2n} \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} \right\|_\infty \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

terme général positif de série convergente.

14. Un calcul sans saveur donne

$$H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

15. En dérivant la définition de H_n , on trouve directement

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

16. Montrons par récurrence sur n que H_n est de degré n et de même parité que n :

- C'est bien le cas pour $n = 0$ puisque $H_0 = 1$.
- Supposons que c'est le cas pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, quelconque. Le degré de H'_n est alors $n - 1$ (ou $-\infty$ si $n = 0$) et est donc plus petit que celui de $2XH_n$, qui est (par degré d'un produit) $1 + \deg(H_n) = n + 1$. Par degré d'une somme, le degré de H_{n+1} est donc $n + 1$. Par ailleurs, H_n étant de la parité de n , H'_n est de la parité inverse de n (il suffit de dériver la relation $H_n(X) = (-1)^n H_n(-X)$ pour s'en rendre compte), et $2XH_n$ également. Donc H_{n+1} est de la parité inverse de celle de n , c'est-à-dire celle de $n + 1$.
- D'où la conclusion par axiome de récurrence.

17. En écrivant $H_n = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on constate via la relation de récurrence que

$$H_{n+1} = 2a_n X^{n+1} + R$$

avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$. La suite (a_n) des coefficients dominants de H_n vérifie donc la relation de récurrence $a_{n+1} = 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite est donc géométrique de raison 2, et puisque $a_0 = 1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^n$$

18. La fonction nulle appartient clairement à E . Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors

$$(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + \mu^2 g^2 + 2\lambda\mu fg$$

Puisque $f, g \in E$, les deux premiers termes de cette somme sont manifestement dans E . Par ailleurs, en utilisant l'inégalité

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

valable pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (la différence est un carré de réels), on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| 2\lambda\mu f g(x) e^{-x^2} \right| \leq |\lambda\mu| \left(f^2(x) + g^2(x) \right) e^{-x^2}$$

Le membre de droite étant l'intégrande d'une intégrale qui converge, celui de gauche l'est aussi par majoration de fonctions positives. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\lambda\mu f(x)g(x)e^{-x^2} dx$ est absolument convergente, donc convergente. Par somme, $\lambda f + \mu g$ est donc un élément de E . Et par caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

On constate que tous les monômes $x \mapsto x^n$ appartiennent à E . En effet, $(x^n)^2 e^{-x^2}$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$ par croissance comparée, d'où le résultat par négligeabilité. Par linéarité, $\mathbb{R}[X]$ est bien un sous-ensemble de E .

19. Cette application est :

- Bien définie, ce qui n'est pas évident, mais c'est la même preuve que celle qu'on vient de faire (E est stable par produit);
- Symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$;
- Linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale, donc bilinéaire;
- Positive par positivité de l'intégrale;
- Définie. En effet, si $\langle f, f \rangle = 0$, la fonction $x \mapsto f(x)^2 e^{-x^2}$ est continue, positive, intégrable et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, donc nulle.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bel et bien un produit scalaire sur E .

20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons que

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) (-1)^{n-1} e^{x^2} w^{(n-1)}(x) e^{-x^2} dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) w^{(n-1)}(x) dx$$

et une intégration par parties obtenue en primitivant P' et en dérivant $w^{(n-1)}$ nous donne alors

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \left(\left[P(x) w^{(n-1)}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) w^{(n)}(x) dx \right)$$

l'intégration par parties étant justifiée par le fait que la quantité $P(x) w^{(n-1)}(x)$ tend vers 0 en $\pm\infty$. Le crochet s'annule donc, et on trouve finalement

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$$

ce qui signifie exactement que

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P, H_n \rangle$$

ce que l'on souhaitait démontrer.

21. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on itère l'égalité précédente pour obtenir par une récurrence immédiate

$$\langle P, H_n \rangle = \langle P^{(n)}, H_0 \rangle = \langle 0, 1 \rangle = 0$$

d'où le résultat.

22. La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une famille de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes échelonnée en degrés, donc libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par ailleurs, la question précédente montre notamment que les H_k sont orthogonaux deux à deux. D'où le résultat.

23. C'est une conséquence directe de la question 20 de nouveau : en posant $P = H_n$, on obtient

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle = \langle H'_n, H_{n-1} \rangle = \cdots \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle$$

par une récurrence là encore relativement immédiate.

24. Puisque H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n , $H_n^{(n)}$ n'est autre que $2^n n!$. Ainsi,

$$\|H_n\|^2 = \langle n!2^n, 1 \rangle = \frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}} J = 2^n n!$$

Donc :

$$\|H_n\| = 2^{n/2} \sqrt{n!}$$

25. Le caractère linéaire de u est assez direct (linéarité de la dérivation et du produit par un polynôme fixé). Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, le degré de $2XP'$, qui vaut $1 + \deg(P) - 1$, est plus petit que n ; celui de P'' aussi; par somme, celui de $u(P) = -P'' + 2XP' + P$ est également plus petit que n . D'où la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par u .

26. Id est l'application « identique », ou plutôt identité, de $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$v \circ w(P) = v(w(P)) = v(P') = 2XP' - P'' - P'' + 2XP' + P - P = (u - \text{Id})(P)$$

Et par ailleurs :

$$w \circ v(P) = (2XP - P')' = 2P + 2XP' - P'' = (P + 2XP' - P'') + P = (u + \text{Id})(P)$$

Ces égalités étant vraies pour tout P , on a bien $v \circ w = u - \text{Id}$ et $w \circ v = u + \text{Id}$.

27. D'après la question précédente, on a $u = \text{Id} + v \circ w = w \circ v - \text{Id}$. On a donc

$$\begin{aligned} u \circ v - v \circ u &= (\text{Id} + v \circ w) \circ v - v \circ (w \circ v - \text{Id}) \\ &= v + v \circ w \circ v - v \circ w \circ v + v \\ &= 2v \end{aligned}$$

28. Si $u(P) = \lambda P$, d'après la question précédente, on a

$$u(v(P)) = 2v(P) + v(u(P)) = 2v(P) + v(\lambda P) = (2 + \lambda)v(P)$$

la dernière égalité ayant été obtenue par linéarité de v .

29. Par récurrence sur k :

- $P_0 = 1$ et $u(P_0) = u(1) = 1$ donc P_0 est bien un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda_0 = 1$;
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k . On a donc $u(P_k) = \lambda_k P_k$, donc (d'après la question précédente) $u(v(P_k)) = (\lambda_k + 2)v(P_k)$. Or, $v(P_k) = 2XP_k - P'_k = P_{k+1}$ d'après la question 15 (les fonctions polynomiales sont égales, donc les polynômes aussi, même si cette précision sera probablement inutile vu l'esprit du sujet). Donc $u(P_{k+1}) = (\lambda_k + 2)P_{k+1}$ et P_{k+1} est bien, étant non nul, un vecteur propre pour u associé à la valeur propre $\lambda_{k+1} = \lambda_k + 2$.
- D'où la conclusion par axiome de récurrence.

La suite (λ_k) étant arithmétique, on a manifestement $\lambda_k = 2k + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

30. L'endomorphisme u_n possède $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres distinctes, à savoir tous les $2k + 1$ pour $0 \leq k \leq n$; en effet, tous les H_k sont dans $\mathbb{R}_n[X]$. D'après un critère classique, u_n est bien diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

31. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Notons que par linéarité à gauche :

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle -P'' + 2XP', Q \rangle + \langle P, Q \rangle$$

Il s'agit donc de montrer que le premier terme de la somme vaut également $\langle P', Q' \rangle$. Pour ce faire, écrivons sa définition :

$$\langle -P'' + 2XP', Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} ((-P''(x) + 2xP'(x))e^{-x^2}) Q(x) dx$$

On remarque que la parenthèse est la dérivée en x de $-P'(x)e^{-x^2}$. Ainsi, par intégration par parties et nullité du crochet, on constate que

$$\langle -P'' + 2XP', Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)e^{-x^2} Q(x) dx = \langle P', Q' \rangle$$

Et on a bien démontré le résultat voulu.

32. On a donc pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle P', Q' \rangle + \langle P, Q \rangle$$

L'expression de droite étant symétrique en P et Q et par symétrie du produit scalaire, on a donc

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$$

Ce résultat étant notamment vrai pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on a bien :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \quad \langle u_n(P), Q \rangle = \langle P, u_n(Q) \rangle$$

ce qui est la définition du fait que u_n est autoadjoint.

33. C'est exactement le théorème spectral appliqué à u_n .

34. La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ (question 22) constituée de vecteurs propres pour u_n (question 29); il suffit donc de normer chacun de ses vecteurs, en le divisant par sa norme calculée en question 24, pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n .

35. Il y a une erreur dans la question, il faut lire $f \in E$ au lieu de $\xi \in E$. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}| = f(x)e^{-x^2/2} \cdot e^{-x^2/2}$$

Le facteur de droite est de carré intégrable (on a même calculé J en question 8), et celui de gauche l'est car $f \in E$. Le résultat s'en suit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Remarque : une autre possibilité, mais elle fait écrire une intégrale de fonction positive avant de montrer sa convergence...

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx = \langle |f|, x \mapsto 1 \rangle < +\infty$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($|f| \in E$ car $f \in E$ - elles ont le même carré - et $x \mapsto 1 \in E$).

36. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ aux voisinages de $\pm\infty$. Maintenant

$$\begin{aligned}
M_p &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x^{2p-1} \cdot 2x e^{-x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-x^{2p-1} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (2p-1) x^{2p-2} e^{-x^2} dx \\
&= \frac{2p-1}{2} M_{p-1} \\
&= \dots \\
&= \frac{(2p-1)(2p-3) \dots 1}{2^p} J \\
&= \boxed{\frac{(2p-1)(2p-3) \dots 1}{2^p} \sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

37. Développement en série entière de $e^{-it\xi}$ et linéarité de la somme.

38. Il suffit de démontrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on peut intervertir somme et intégrale dans le résultat précédent (ceci montrera que $\xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$).

Fixons $\xi \in \mathbb{R}$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x) e^{-x^2} \frac{(-i\xi)^n}{n!} x^n$. Alors

- les f_n sont clairement continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (négligeables devant $\frac{1}{x^2}$ aux voisinages de $\pm\infty$).
- $\sum f_n$ converge simplement, vers $x \mapsto f(x) e^{-x^2} e^{-ix\xi}$
- f_n est clairement continue sur $\mathbb{R}$
-

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-x^2} \frac{|\xi|^n |x|^n}{n!} dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\xi|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| x^n e^{-x^2} dx \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \langle |f|, x \mapsto x^n \rangle \frac{|\xi|^n}{n!} \\
&\leq \|f\| \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{M_n}{\sqrt{\pi}}} \frac{|\xi|^n}{n!} \quad (\text{Cauchy-Schwarz})
\end{aligned}$$

Et il suffit de montrer que cette série est absolument convergente. En notant a_n son terme général, on constate que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\xi|}{n+1} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\xi|}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

Par la règle de d'Alembert $\sum a_n$ converge donc bien absolument.

D'où le résultat!

39. $(H_0, \dots, H_n)$ formant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, X^n est combinaison linéaire de $H_0, \dots, H_n$. Ainsi, f est orthogonal à X^n ; c'est exactement ce qu'on souhaitait établir.

40. Puisque $\mathcal{F}(f)$ est développable en série entière, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2} dx \right) \xi^n = 0$$

d'après la question précédente.

41. On a admis que $\mathcal{F}$ était injective sur E . C'est donc que son noyau est restreint à $\{0\}$. Puisque f est dans ce noyau d'après la question précédente, c'est que f est nulle.