TD entraînement n°10. Corrigé

Exercice A

1) a) Soit F une primitive de f. La dérivée de $t \longmapsto F(t+T) - F(t)$ est nulle, donc $t \longmapsto \int_t^{t+T} f(u)\,du$ est constante.

b) Les solutions de (H) sont les $x(t) = k\,e^{A(t)}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Il existe donc une solution non nulle T-périodique ssi $e^{A(t)}$ est T-périodique, c'est-à-dire ssi $A(t)$ est elle-même T-périodique.

Or, par a), A est T-périodique ssi sa valeur moyenne est nulle. Donc A est T-périodique ssi $\Delta = 0$.

2) a) Par la méthode de variation des constantes, on pose $x(t) = z(t)e^{A(t)}$. L'équation (E) s'écrit $z'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.

Donc les solutions de (E) sont les $x(t) = e^{A(t)}(k + \int_0^t b(u)e^{-A(u)}\,du)$.

b) On a vu au 1) que $A(t+T) = A(t) + \Delta$. Donc $x(t+T) = e^{A(t)}e^{\Delta}(k + \int_0^{t+\Delta} b(u)e^{-A(u)}\,du)$.

Posons $\Gamma = \int_0^{\Delta} b(u)e^{-A(u)}\,du$. On a $\int_{\Delta}^{t+\Delta} b(u)e^{-A(u)}\,du = \int_0^t b(u)e^{-A(u)-\Delta}\,du$.

On en déduit $x(t+T) = e^{A(t)}(e^{\Delta}k + e^{\Delta}\Gamma + \int_0^t b(u)e^{-A(u)}\,du) = x(t) + e^{A(t)}(e^{\Delta}k + e^{\Delta}\Gamma - k)$.

Si $\Delta = 0$, toute solution est périodique si $\Gamma = 0$, et aucune si $\Gamma \neq 0$.

Si $\Delta \neq 0$, il existe une seule solution périodique, correspondant à $k = \frac{e^{\Delta}\Gamma}{1-e^{\Delta}}$.

Meilleure solution : **Si** x **est solution alors la fonction** $t \longmapsto x(t+T)$ **est solution de** (E). Or, on sait (cf problème de Cauchy-Lipschitz que toute solution est entièrement déterminée par sa valeur en $t=0$). Donc $(\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = x(t+T))$ ssi $x(0) = x(T)$.

Or, avec $x(t) = e^{A(t)}(k + \int_0^t b(u)e^{-A(u)}\,du)$, on a $x(0) = k$ et $x(T) = e^{\Delta}(k+\Gamma)$. On conclut aisément.

Exercice B

1) a) $\dfrac{g^{(n)}(x)}{n!} = \dfrac{1}{\lambda^n}\left(1 - \dfrac{x}{\lambda}\right)^{-(n+1)}$, donc $\forall x \in [-\beta, \beta]$, $\dfrac{\left|g^{(n)}(x)\right|}{n!} \leq \dfrac{1}{\lambda^n}\left(1 - \dfrac{\beta}{\lambda}\right)^{-(n+1)}$.

On peut donc prendre $A = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{\beta}{\lambda}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda - \beta}$ et $M = \left(1 - \dfrac{\beta}{\lambda}\right)^{-1} = \dfrac{\lambda}{\lambda - \beta}$.

b) On a $\forall x \in]-\lambda, \lambda[$, $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{\lambda^k}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-\lambda, \lambda[$, $\dfrac{g^{(n)}(x)}{n!} = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(k+1)(k+2)...(k+n)}{n!} \dfrac{x^k}{\lambda^{k+n}}$

d'où $\dfrac{g^{(n)}(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(k+n)!}{n!k!} \dfrac{x^k}{\lambda^{n+k}}$, c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{g^{(n)}(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} \dfrac{x^k}{\lambda^{n+k}}}$.

2) a) Supposons (ii).

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a : $\forall x \in [-\beta, \beta]$, $|f(x) - P_n(x)| \leq M.\,(A\,|x|)^{n+1}$.

On prend $R = \min\left(\dfrac{1}{A}, \beta\right) > 0$. Alors $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \text{ c'est-à-dire } f \text{ DSE en 0 sur }]-R, R[$$

b) On considère $\rho < R$. La suite $(a_k \rho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée (par définition de R).

Il existe donc K tel que $|a_k| \leq \dfrac{K}{\rho^k}$.

Or, on a : $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(k+n)(k+n-1)...(k+1)}{n!}\, a_{k+n}\, x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k}\, a_{k+n}\, x^k$.

Donc, pour $|x| < \rho$, $\dfrac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} \dfrac{K}{\rho^{k+n}} |x|^k = K \dfrac{g^{(n)}(|x|)}{n!}$, où $g(x) = \left(1 - \dfrac{x}{\rho}\right)^{-1}$.

On conclut alors par 1) a) :

On choisit β tel que $0 < \beta < \rho$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-\beta, \beta]$, $\dfrac{g^{(n)}(|x|)}{n!} \leq \dfrac{1}{\lambda - \beta} \left(\dfrac{1}{\lambda - \beta}\right)^n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-\beta, \beta]$, $\dfrac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!} \leq KMA^n$, où $A = \dfrac{1}{\lambda - \beta}$ et $M = \dfrac{\lambda}{\lambda - \beta}$.