TD entraînement n°10

Exercice A. Solutions périodiques d'une équation différentielle linéaire. (*écrit X MP*)

Soit un réel $T > 0$. On note $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et T-périodiques.

Soit $a \in \mathcal{P}$. On considère le réel $\Delta = \int_0^T a(t)dt$, et la fonction A définie sur $\mathbb{R}$ par $A(t) = \int_0^t a(u)du$.

1) a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et périodique de période T. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_t^{t+T} f(u)\ du = \int_0^T f(u)\ du$$

b) On s'intéresse aux solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(H) : x'(t) = a(t)x(t)$$

Démontrer que les solutions de (H) sont T-périodiques ssi $\Delta = 0$.

2) Soit $b \in \mathcal{P}$. On s'intéresse aux solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

a) Donner sans justification l'ensemble des solutions de (E).

b) On pose $\Gamma = \int_0^T b(u)e^{-A(u)}du$.

Montrer que si $\Delta = 0$, toute solution est périodique si $\Gamma = 0$, et aucune si $\Gamma \neq 0$.

Montrer que si $\Delta \neq 0$, il existe une unique solution périodique.

Exercice B. Fonction développable en série entière (*inspiré Oral X PC 2015*)

1) Soit $\lambda > 0$. On considère $\forall x \in]-\lambda, \lambda[, \quad g(x) = \left(1 - \dfrac{x}{\lambda}\right)^{-1}$.

a) On considère β vérifiant $0 < \beta < \lambda$. Montrer qu'il existe des réels $M > 0$ et $A > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in [-\beta, \beta], \qquad \frac{\left|g^{(n)}(x)\right|}{n!} \leq M.A^n$$

b) Exprimer (à l'aide de coefficients binomiaux) les coefficients du DSE de $\dfrac{g^{(n)}(x)}{n!}$ sur $]-\lambda, \lambda[$.

2) Soit $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞, avec $\alpha > 0$.

On se propose de prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est DSE au voisinage de 0

(ii) Il existe $M > 0$, $A > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-\beta, \beta], \quad \frac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!} \leq M.A^n$$

a) Supposons que (ii) est vérifié. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Montrer que pour $|x|$ assez petit, $f(x) = \lim_{n \to +\infty} P_n(x)$. Conclure.

b) Supposons que (i) est vérifié, c'est-à-dire que f est DSE sur un voisinage $]-R, R[$ de 0.

Il existe donc $R > 0$ et une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Démontrer (ii).