TD entraînement n°8. Corrigé

1. On a $\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{6}+\mathfrak{o}\left(x^2\right)\right)^{-2} = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{3}+\mathfrak{o}\left(x^2\right)\right) = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\mathfrak{o}\left(1\right).$

Donc $\lim_{x\to 0, x\neq 0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}.$

De même, $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x}\frac{1+\mathfrak{o}\left(x\right)}{1+\mathfrak{o}\left(x\right)} = \frac{1}{x}\left(1+\mathfrak{o}\left(x\right)\right) = \frac{1}{x}+\mathfrak{o}\left(1\right)$. Donc $\lim_{x\to 0, x\neq 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = 0.$

2.a) Posons $u_n(x) = \frac{1}{(x-n\pi)^2}$, bien définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Pour x fixé, $u_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et vers $+\infty$, donc la série converge.

Soient $m\in\mathbb{Z}$. Soit un segment $[a,b]\subset]m\pi,(m+1)\pi[$.

Alors $\forall n\geq m+1$, $0\leq u_n(x)\leq \frac{1}{(a-n\pi)^2}$ et pour tout $n\leq m$, $0\leq u_n(x)\leq \frac{1}{(b-n\pi)^2}$.

Donc les séries $\sum_{n>m} u_n(x)$ et $\sum_{n\leq m} u_n(x)$ convergent normalement sur $[a,b]$.

On en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

2.b) $S(x+\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+\pi-n\pi)^2} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+m\pi)^2}$, avec le changement de variable $m=n-1$.

Donc $S(x+\pi) = S(x)$, c'est-à-dire S est π-périodique.

2.c) Par a), f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Par b), f est π-périodique. Donc pour prouver que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que f est prolongeable par continuité en $x=0$.

On a $S(x) = \frac{1}{x^2}+R(x)$, avec $R(x) = \sum_{n\in z^*}\frac{1}{(x-n\pi)^2}$.

Par le même raisonnement qu'au 3.a), R est continue sur $]-\pi,\pi[$.

Par 1), $\lim_{x\to 0, x\neq 0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}.$

Donc $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = \frac{1}{3}-R(0)$. Donc f prolongeable par continuité en $x=0$. D'où le résultat.

3.a) Il est essentiel de noter que si $x\in[-a,a]$, alors $\frac{x}{2}\in[-a,a]$ et $\frac{x+\pi}{2}\in[-a,a]$, car $\pi\in[-a,a]$.

On en déduit que $\forall x\in[-a,a],\ \ |f(x)| = \frac{1}{4}\left|f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{2M_a}{4} = \frac{M_a}{2}.$

Donc $M_a\leq\frac{M_a}{2}$, et on en conclut $M_a = 0$.

3.b) Comme $\mathbb{R}$ est la réunion des $[-a,a]$, avec $a\geq\pi$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

4. On considère la fonction f définie au 3.

On peut noter que pour tout $x\notin\pi\mathbb{Z}$, alors $\frac{x}{2}\notin\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{x+\pi}{2}\notin\pi\mathbb{Z}$.

On vérifie que $x\longmapsto\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2$ et $x\longmapsto S(x)$ vérifient la relation du 4) :

En effet, on a d'une part

$$\left(\frac{1}{\sin(x/2)}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin(x/2+\pi/2)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin(x/2)}\right)^2+\left(\frac{1}{\cos(x/2)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin(x/2)\cos(x/2)}\right)^2$$

Or, $\sin(x/2)\cos(x/2) = \dfrac{1}{2}\sin(x)$, donc $\left(\dfrac{1}{\sin(x/2)\cos(x/2)}\right)^2 . = 4\left(\dfrac{1}{\sin(x)}\right)^2$.

Et d'autre part, $S\left(\dfrac{x}{2}\right) + S\left(\dfrac{x+\pi}{2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{4}{(x-2n\pi)^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{4}{(x-(2n+1)\pi)^2} = 4S(x)$.

Par linéarité, f vérifie la relation sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Par continuité de f et par passage à la limite, f vérifie la relation sur $\mathbb{R}$.

Par 4.b), f est identiquement nulle. D'où le résultat.

5. - On pose $\phi_N(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \left(\dfrac{1}{x-n\pi} + \dfrac{1}{x+n\pi}\right) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$.

On a $\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc il existe $\phi(x) = \lim_{n\to+\infty} \phi_N(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$.

Pour tout $x \in [-m\pi, m\pi]$, $\forall n > m$, $\left|\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\right| \leq \dfrac{2m\pi}{(n^2-m^2)\pi^2}$.

On en déduit que $x \longmapsto \sum_{n>m} \dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ est continue sur $[-m\pi, m\pi]$.

Donc ϕ est continue sur $]-m\pi, m\pi[\setminus\pi\mathbb{Z}$ (on ajoute une somme finie de fonctions continues).

Comme m est arbitraire, Φ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

- Montrons que ϕ est π-périodique.

On a $\phi_N(x+\pi) = \sum_{n=-N}^N \left(\dfrac{1}{x+\pi-n\pi}\right) = \phi_N(x) - \dfrac{1}{x-N\pi} + \dfrac{1}{x+(N+1)\pi}$.

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\phi(x+\pi) = \phi(x)$.

- On a $\forall x \in]0,\pi[$, $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(x-n\pi)^2}$.

La série de fonctions du second membre converge normalement sur tout segment.

On peut donc intégrer terme à terme sur $[0,x]$, où $x \in]-\pi,\pi[$.

On obtient : $\forall x \in]0,\pi[$, $-\dfrac{\cos x}{\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{-1}{(x-n\pi)} + K$, où K est constante.
Ainsi, $\forall x \in]0,\pi[$, $\dfrac{\cos x}{\sin x} = \Phi(x) + K$, où K est constante.
On a $\dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{x} + R(x) + K$, où $R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$.

La convergence de la dernière est normale au voisinage de 0, donc R est continue en 0.

On sait que $\lim_{x\to0,x>0} \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0$. Comme $R(0) = 0$, alors $K = 0$. Donc $\forall x \in]0,\pi[$, $\dfrac{\cos x}{\sin x} = \phi(x)$.

Comme les deux membres de l'équation sont π-périodiques, la relation est vraie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.