TD entraînement n°8. Exemple de développement eulérien

1. Déterminer $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^2 - \dfrac{1}{x^2}$ et $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \left(\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

2.a) Montrer que $S : x \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(x-n\pi)^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Remarque : La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ converge ssi les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$ convergent.

Ne pas confondre avec l'existence de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} u_k$ (qui est une propriété moins forte).

2.b) Montrer que S est périodique.

2.c) Montrer que $f : x \longmapsto \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^2 - S(x)$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+\pi}{2}\right) = 4f(x)$$

3.a) Soit $a \geq \pi$. On pose $M_a = \sup_{[-a,a]} |f|$. Montrer que $M_a = 0$.

3.b) Que peut-on en déduire sur f ?

4. Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n\pi)^2}$$

5. (★) *Question supplémentaire.* En utilisant 4), montrer avec un grand soin que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x-n\pi} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$