TD entraînement n°7. Corrigé

1) a) $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une loi binomiale à valeurs dans $\{n-2k,\ k \in \{0,1,2,...,n\}\}$.

Pour le prouver, il suffit de décomposer $X_n = 1 - 2Z_n$, où Z_n variable de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Donc $P(S_n = n-2k) = P(Z_1 + ... + Z_n = k) = \binom{n}{k}2^{-n}$.

Donc $g(n) = \binom{2k}{k}4^{-k}$ avec $k = \dfrac{n}{2}$ si n pair et $g(n) = 0$ si n impair.

b) On a $\forall u \in]-1,1[$, $(1-u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}...\dfrac{2k-1}{2} = \dfrac{(2k)!}{(k!)^2}\dfrac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} g(2k)u^k$.
Donc $\forall t \in]-1,1[$, $(1-t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} g(2k)t^{2k} = G(t)$.

2) On a $f(2) = P(S_2 = 0) = P(X_2 = -X_1) = \dfrac{1}{2}$.

On a $f(4) = P(X_2 = X_1)P(X_3 = -X_1, X_4 = -X_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.

Comme les $f(n)$ sont les probabilités d'événements disjoints, alors par additivité, $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq 1$.

3) S'il y a retour en A_n, il y a nécessairement premier retour en un $k \in [\![1,n]\!]$.

De plus, les B_k sont disjoints deux à deux. Donc les $A_n \cap B_k$, avec $1 \leq k \leq n$, forment une partition de A_n.

Donc $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n \mid B_k)P(B_k)$.

Remarque : Il ne s'agit pas stricto sensu de la formule des probabilités totales, car ici, les B_k, où $0 \leq k \leq n$, ne forment pas un système total.

4) On a $P(A_n \mid B_k) = P(X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_n = 0 \mid B_k)$.

Comme $(X_{k+1}, ., .., X_n)$ et $(X_1, ..., X_k)$ sont indépendantes, alors : $P(X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_n = 0 \mid B_k) = P(X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_n = 0) = g(n-k)$.

5) Les séries entières $\sum g(n)t^n$ et $\sum f(n)t^n$ ont un rayon de convergence ≥ 1.

On a $\forall t \in [0,1[$, $G(t) = g(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} g(n-k)f(k)\right)t^n$. On a de plus $g(0) = 1$ et $f(0) = 0$.

Donc $G(t) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} g(n-k)f(k)\right)t^n$.

Par produit de Cauchy, on obtient donc $\forall t \in [0,1[$, $G(t) = 1 + G(t)F(t)$.

6) Pour $t \in [0,1[$, on a $F(t) = 1 - \dfrac{1}{G(t)} = 1 - (1-t^2)^{1/2}$. Donc $\lim_{t\to 1, t<1} F(t) = 1$.

Or, la série $\sum f(n)$ converge absolument. Par cv normale sur $[0,1]$ de $\sum f(n)t^n$, on a F continue sur $[0,1]$.

Donc $F(1) = \lim_{t\to 1, t<1} F(t) = 1$.

7) Si $n = 2k \geq 2$, $f(n) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}...\dfrac{2k-3}{2} = \dfrac{1}{2k-1}\dfrac{(2k)!}{(k!)^2}\dfrac{1}{2^{2k}} = \dfrac{1}{2k-1}f(n)$.

8) a) On a pour $r \geq 1$, $a(r,n) = \sum_{k=0}^{n} a(r-1,k)f(k)$.

b) La probabilité d'un r-ième retour à l'origine vaut $A(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(r,n)$.

Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a(r,n)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ sont absolument convergentes.

Par produit de Cauchy, on a donc $A(r) = A(r-1)F(1)$. Donc $A(r) = F(1)^r$.

c) Ici, $F(1) = 1$, donc $A(r) = 1$.

Par continuité décroissante, la probabilité d'une infinité de retours en 0 vaut $\lim_{r\to+\infty} A(r) = 1$.

9) On a alors $g(n) = \binom{2k}{k}(pq)^k$ avec $k = \dfrac{n}{2}$ si n pair et $g(n) = 0$ si n impair.

On a alors $G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k}(pq)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{4^k}\binom{2k}{k}(4pq)^k t^{2k} \dfrac{1}{\sqrt{1-rt^2}}$, où $r = 4pq < 1$.

Le raisonnement fait précédemment reste vrai, donc $\forall t \in [0,1[$, $F(t) = 1 - \dfrac{1}{G(t)} = 1 - (1-rt^2)^{1/2}$.

La probabilité de retour en 0 est donc $F(1) = \lim_{t\to 1, t<1} F(t) = 1 - \sqrt{1-r}$.

Remarque : Lorsque p tend vers 1, r tend vers 0, et $F(1)$ tend vers 0.

10) La probabilité de retour en $\overrightarrow{0}$ vaut $F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.

Comme $F(1) = \lim_{t\to 1, t<1} F(t)$, alors $F(1) = \lim_{t\to 1, t<1} 1 - \dfrac{1}{G(t)}$.

On a donc $F(1) = 1$ ssi $\lim_{t\to 1, t<1} G(t) = +\infty$.

- Si $\sum g(n)$ converge, alors par convergence normale sur $[0,1]$, $\lim_{t\to 1, t<1} G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) < +\infty$.

- Si $\sum g(n)$ diverge vers $+\infty$, $\lim_{t\to 1, t<1} G(t) = +\infty$.

(en effet, G est croissante donc $\lim_{t\to 1, t<1} G(t)$ existe (finie ou infinie).

On a par ailleurs pour tout N, $G(t) \geq \sum_{n=0}^{N} g(n)t^n$, donc $\lim_{t\to 1, t<1} G(t) \geq \sum_{n=0}^{N} g(n)$).

11) a) On a $P(x_i + y_i = 1) = P(x_i = 1, y_i = 0) + P(x_i = 0, y_i = 1) = \frac{1}{2}$.

De même $P(x_i + y_i = 1) = \frac{1}{2}$. De même pour $x_i - y_i$.Donc $x_i + y_i$ et $x_i - y_i$ sont des v.a. de Rademacher.

De plus, $P(x_i + y_i = 1,\, x_i - y_i = 1) = P(x_i = 1, y_i = 0) = \frac{1}{4} = P(x_i + y_i = 1)P(\, x_i - y_i = 1)$.

De même pour les $P(x_i + y_i = \varepsilon_i,\, x_i - y_i = \varepsilon'_i)$ pour tout $(\varepsilon_i, \varepsilon'_i) \in \{-1, 1\}^2$.

Comme les X_i sont indépendants, on a plus généralement :

$P(x_i + y_i = \varepsilon_i,\, x_i - y_i = \varepsilon'_i) = \frac{1}{2^{2n}} = \prod_{i=1}^{n} P(x_i + y_i = \varepsilon_i)P(\, x_i - y_i = \varepsilon'_i)$.

Donc les $2n$ variables aléatoires sont bien mutuellement indépendantes.

b) $S_n = \overrightarrow{0}$ ssi $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$ ssi $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = 0$ et $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) = 0$.

On se ramène donc à deux marches aléatoires équilibrées sur $\mathbb{Z}$, avec au total $2n$ variables de Rademacher mutuellement indépendantes.

On déduit de 1) a) que $g(n) = P(S_n = \overrightarrow{0}) = \left(\binom{2k}{k}4^{-k}\right)^2$ si $n = 2k$ pair, et 0 si n impair.

c) On a donc $g(n) \sim \dfrac{1}{\pi n}$, donc $\sum g(n)$ diverge, et par 10), il y a presque sûrement retour en $\overrightarrow{0}$.

12) La série $\sum g(n)$ converge ssi $d \geq 3$. Dans ce cas, la probabilité de retour en $\overrightarrow{0}$ est < 1.