TD entraînement n°7

Retours à l'origine dans les marches aléatoires

Partie I. Marche aléatoire équilibrée sur $\mathbb{Z}$

On considère $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ somme de n variables indépendantes de Rademacher ($X_i : \Omega \to \{-1, 1\}$).

On note $g(n) = P(S_n = 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = P(S_n = 0 \text{ et } S_1 \neq 0\ ,\ S_2 \neq 0,\ \ldots\ ,\ S_{n-1} \neq 0)$.

Autrement dit, $f(n)$ est la probabilité de premier retour en 0 en n.

1) On prend $g(0) = 1$.

a) Montrer que pour tout $n = 2k$ pair, $g(n) = \binom{2k}{k} 4^{-k}$ et que $g(n) = 0$ si n impair.

On obtient ainsi avec la formule de Stirling (*admis ici*) $g(n) = \binom{2k}{k} 4^{-k} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$.

b) On pose $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) t^n$ et $F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) t^n$ pour $t < 1$.

Montrer que $\forall t \in [0, 1[$, $G(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$.

2) Donner sans justification $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$. Montrer que $\sum f(n)$ converge.

3) On considère les événements $A_n : S_n = 0$ et B_k : " Le premier retour en 0 se fait au temps k ".

Montrer que $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n \mid B_k) P(B_k)$.

4) Montrer que $P(A_n \mid B_k) = g(n - k)$. Ainsi, $\forall n \geq 1$, $\boxed{g(n) = \sum_{k=1}^{n} g(n-k) f(k)}$.

5) Montrer que $\forall t \in [0, 1[$, $G(t) = 1 + G(t) F(t)$.

6) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = 1$, donc presque sûrement, il y a retour en 0.

7) Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8) a) On note $a(r, n)$ la probabilité d'un r-ième retour à l'origine à l'étape n.

Pour r et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer sans justification $a(r, n)$ en fonction des $a(r-1, k)$ et des $f(j)$.

b) On note $A(r)$ la probabilité d'un r-ième retour à l'origine. Montrer que $A(r) = F(1)^r$.

c) Montrer que presque sûrement, il y a une infinité de retours en 0.

Partie II. Marche aléatoire non équilibrée sur $\mathbb{Z}$

On suppose ici $P(X_i = 1) = p > \dfrac{1}{2}$. On pose $r = 4pq$. On a ainsi $r < 1$.

9) Calculer la probabilité de retour en 0. On trouvera un réel strictement inférieur à 1.

Partie III. Marche aléatoire équilibrée sur $\mathbb{Z}^d$

On note $(e_1, e_2, ..., e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On suppose ici X_i vecteur aléatoire de loi uniforme à valeurs dans $\{\pm e_1, \pm e_2, ..., \pm e_d\}$.

On pose $g(n) = P(S_n = \overrightarrow{0})$.

La relation $\forall t \in [0,1[$, $G(t) = 1 + G(t)F(t)$ est encore vérifiée. Et on a $F(1) = \lim_{t \to 1, t<1} F(t)$.

10) Justifier qu'il y a presque sûrement retour en $\overrightarrow{0}$ ssi $\sum g(n)$ diverge (vers $+\infty$).

11) Cas $d = 2$. On suppose $X_i = (x_i, y_i)$ vecteur aléatoire de loi uniforme à valeurs dans $\{e_1, -e_1, e_2, -e_2\}$.

a) Montrer que les $2n$ variables $(x_i + y_i)$ et $(x_i - y_i)$ sont des v.a. de Rademacher indépendantes.

b) Montrer que pour tout $n = 2k$ pair, $g(n) = \left(\binom{2k}{k} 4^{-k}\right)^2$.

c) En conclure qu'il y a presque sûrement retour en $\overrightarrow{0}$.

12) On considère la marche aléatoire équilibrée sur $\mathbb{Z}^d$.

On montre (*admis ici*) que $g(n)$ admet un équivalent de la forme $g(n) \sim \dfrac{\lambda}{n^{d/2}}$.

En déduire une CNS sur d pour avoir presque sûrement retour en $\overrightarrow{0}$.