TD entraînement n°6. Corrigé

1. Posons $u_n = \dfrac{n^r z^n}{n!}$. On a $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$. Par de D'Alembert, la série converge pour tout z.

2. On utilise le théorème du transfert : On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^r}{x^r}P(Y_x = n) = \dfrac{n^r}{n!}x^{n-r}e^{-x}$.

La série $\sum \dfrac{n^r}{n!}x^{n-r}e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{x^r}\sum \dfrac{n^r}{n!}x^n$ converge d'après la question 1).

Par le théorème du transfert, $(Z_x)^r$ est donc d'espérance finie, et $E((Z_x)^r) = \dfrac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^r}{n!}x^n$.

Comme r n'est pas nul, le terme en $n=0$ est nul. Donc $E((Z_x)^r) = \dfrac{e^{-x}}{x^r}S_r(x)$.

3. On sait par le cours que $E(X_x) = V(X_x) = x$.

Donc $E(Z_x) = 1$ et $V(Z_x) = \dfrac{1}{x}$. On utilise alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) \leq \frac{V(Z_x)}{x^{-2/3}} = \frac{1}{x^{1/3}} \to 0 \text{ lorsque } x \to +\infty$$

4. On a $P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = P((Z_x)^r \geq (1-x^{-1/3})^r)$, car tous les termes considérés sont positifs.

Par l'inégalité de Markov, $P((Z_x)^r \geq (1-x^{-1/3})^r) \leq \dfrac{E((Z_x)^r)}{(1-x^{-1/3})^r}$, qui est l'inégalité demandée.

D'autre part, $P(Z_x < 1 - x^{-1/3}) \leq P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right)$. Par 3), on a donc $\lim_{x\to+\infty} P(Z_x < 1 - x^{-1/3}) = 0$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = 1$. On conclut en notant qu'on a aussi $\lim_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r = 1$.

5. Considérons $H_N(Z) = \prod_{k=0}^{N-1}(Z-k)$ polynôme d'indéterminée z. On a $Y_{x,N} = H_N(X_x)$.

On considère la série $\sum_{n=0}^{+\infty} H_N(n)P(X_n = n) = \sum n(n-1)...(n-N+1)\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Cette série converge, donc par le théorème du transfert, $Y_{x,N}$ est d'espérance finie.

On a $E(Y_{x,N}) = \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1)...(n-N+1)\dfrac{x^n}{n!}e^{-x} = \sum_{n=N}^{+\infty}\dfrac{x^{n-N}}{(n-N)!}e^{-x} = x^N\sum_{m=0}^{+\infty}\dfrac{x^m}{m!}e^{-x} = x^N$.

Mieux : On a en fait pour toute v.a. entière de moment d'ordre N fini :

$E(H_N(X)) = G_X^{(N)}(1)$, car $\forall t \in [-1,1]$, $G_X^{(N)}(t) = \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1)...(n-N+1)P(X=n)t^{n-N}$.

Ici, $G_{X_x}(t) = \exp(x(t-1))$, donc $G_X^{(N)}(1) = x^N$.

6. Les polynômes $H_0, ..., H_N$ sont des polynômes de degrés échelonnés, donc forment une base de $\mathbb{R}_N[Z]$.

Donc $Z^N \in \text{Vect}(H_0, H_1, ..., H_N)$, c'est-à-dire qu'il existe $(a_k)_{1\leq k\leq N}$ tels que $Z^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k(Z)$.

En considérant les termes en Z^N, on a $a_N = 1$. Comme $Z^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k(Z)$, alors $(X_x)^N = \sum_{k=0}^N a_k Y_{x,k}$.

b) On a $E((Z_x)^N) = \dfrac{1}{x^N}\sum_{k=0}^N a_k E(Y_{x,k})$.

Or, par 5), on a $E(Y_{x,k}) = x^k$. Donc $E((Z_x)^N) = \dfrac{1}{x^N}\sum_{k=0}^N a_k x^k = a_N + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

7. a) On étudie la fonction $\varphi : t \longmapsto t^s - s(t-1) - 1$ sur $]0,+\infty[$.

On a $\varphi'(t) = s(t^{s-1} - 1)$. Comme $s - 1 < 0$, alors φ décroît sur $]0,1]$ et croît sur $[1,+\infty[$.

Comme $\varphi(1) = 1$, alors φ est positive.

Remarque : En fait, φ est convexe ($\varphi'' > 0$), donc φ est au-dessus de sa tangente en $t = 1$.

b) On a donc $(Z_x)^r = (Z_x)^N(Z_x)^s \leq s(Z_x)^N(Z_x - 1) + (Z_x)^N = (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}$.

8. Par 6), on a $\forall N \in \mathbb{N}$, $E((Z_x)^N) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty}(1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1} = 1$.

En utilisant les inégalités du 7) b) et du 4), on obtient par pincement $\lim_{x\to+\infty} E((Z_x)^r) = 1$.

Par 2), $E((Z_x)^r) = \dfrac{e^{-x}}{x^r}S_r(x)$, donc $S_r(x) \sim_{x\to+\infty} x^r e^x$.

Exercice B

Par Bienaymé-Tchebychev, on a $\lim_{n\to+\infty} P(|X-\mu|\geq\alpha)=0$.

Or, par le lemme ci-dessous, on a $|E(f(X_n))-f(\mu)|\leq\varepsilon+2\left\|f\right\|_\infty\ P(|X_n-\mu|\geq\alpha)$.

Donc pour n assez grand, $|E(f(X_n))-f(\mu)|\leq 2\varepsilon$. D'où le résultat.

Lemme : Soit X une variable aléatoire réelle.

On a $|E(f(X))-f(\mu)|\leq\varepsilon+2\left\|f\right\|_\infty\ P(|X-\mu|\geq\alpha)$.

dem du lemme : On a $|E(f(X))-f(\mu)|=|E(f(X)-f(\mu))|\leq E(|f(X)-f(\mu)|)$

On a donc $|E(f(X))-f(\mu)|\leq E(Y)$, où $Y=|f(X)-f(\mu)|\leq 2\left\|f\right\|_\infty$ et Y est bien d'espérance bornée.

Considérons A l'événement $|X-\mu|\leq\alpha$.

On a alors $Y=Y.1_A+Y.1_{\overline{A}}\leq\varepsilon.1_A+2\left\|f\right\|_\infty.1_{\overline{A}}$.

Donc $E(Y)\leq\varepsilon\ P(A)+2\left\|f\right\|_\infty\ P(\overline{A})\leq\varepsilon+2\left\|f\right\|_\infty\ P(\overline{A})$, d'où le résultat.