TD entraînement n°6

$\boxed{\textbf{Exercice } (\textit{extrait Mines PC})}$

Soient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une famille $(X_x)_{x>0}$ de variables aléatoires à valeurs entières telle que pour tout $x > 0$, $\boxed{\text{la variables aléatoire } X_x \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } x}$.

Dans tout le sujet, r désigne un réel positif non nul : $\boxed{r > 0}$. On pose $\boxed{\forall x > 0,\ Z_x = \dfrac{X_x}{x}}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $\boxed{Y_{x,N} = X_x(X_x - 1)...(X_x - N + 1) = \prod_{k=0}^{N-1}(X_x - k)}$. En particulier, $Y_{x,0} = 1$.

1. [0.5 pt] On pose $S_r(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^r}{n!} z^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

2. [1 pt] Montrer que $(Z_x)^r$ est d'espérance finie et exprimer $E((Z_x)^r)$ en fonction de $S_r(x)$.

3. [1.5 pt] Rappeler sans justification l'espérance et la variance de X_x.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer : $\lim_{x\to+\infty} P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) = 0$

4. a) [1 pt] Montrer que pour tout $x > 1$, on a

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq E((Z_x)^r)$$

b) [1.5 pt] Montrer par ailleurs que

$$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = 1$$

5. [2 pts] Montrer que $Y_{x,N}$ est d'espérance finie et que $E(Y_{x,N}) = x^N$.

Remarque : Il est conseillé de faire intervenir la série génératrice $G_{X_x}(t)$ de X_x.

6. a) [1.5 pt] Montrer qu'il existe une famille $(a_k)_{0\leq k\leq N}$ de réels tels que

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, (X_x)^N = \sum_{k=0}^{N} a_k Y_{x,k}$$

Indication : Faire intervenir les polynômes $H_j(Z) = \prod_{k=0}^{j-1}(Z - k)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et d'indéterminée Z.

b) [1 pt] Montrer que $\lim_{x\to+\infty} E((Z_x)^N) = 1$.

7. [2 pts]

a) On pose $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $t^s \leq s(t - 1) + 1$.

b) En déduire que $\forall x > 0$, $(Z_x)^r \leq (1 - s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}$.

8. [2 pts] Montrer que $\lim_{x\to+\infty} E((Z_x)^r) = 1$ et en déduire un équivalent de $S_r(x)$ lorsque $x \to +\infty$.