TD entraînement n°5. Corrigé

Exercice A

1) On se place dans une base $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres de u.

On a $\langle x, u(x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \|x\|^2$, avec égalité lorsque $x = e_n$.

2) On a $\dim G = n - k + 1$. Comme $\dim F \geq k$, on a : $\dim G_k + \dim F > n$.

Donc G et F ne sont pas en somme directe. Donc $F \cap G_k$ contient un vecteur non nul x.

Comme $x \in G$, on a a foritori : $\langle x, u(x)\rangle \geq \lambda_k \|x\|^2$. Donc $\sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_k$.

3) Il y a égalité avec $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$. Donc λ_k est un minorant qui est atteint, c'est-à-dire le minimum.

4) $H = \operatorname{Ker} v$ est un hyperplan (dimension $n - 1$).

a) On a $\forall x \in E$, $\langle x, u(x)\rangle \leq \langle x, u(x)\rangle + \langle x, v(x)\rangle = \langle x, w(x)\rangle$, car $\langle x, v(x)\rangle \geq 0$.

En appliquant 3) à u et à w, on en déduit que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \leq \mu_k$.

b) Il reste à prouver que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\mu_{k-1} \leq \lambda_k$. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

Il s'agit donc de prouver que pour tout sev F de dimension k, on a $\sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} \geq \mu_{k-1}$.

Or, $F \cap H$ est un sev de dimension k ou $k - 1$. Il contient toujours un sev G de dimension $k - 1$.

Pour $x \in G$, on a $v(x) = 0$, donc $\langle x, u(x)\rangle = \langle x, w(x)\rangle$.

On en déduit $\sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} \geq \sup_{x\in G,\ x\neq 0} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} = \sup_{x\in G,\ x\neq 0} \dfrac{\langle x, w(x)\rangle}{\|x\|^2} \geq \mu_{k-1}$. D'où le résultat.

Exercice B

1) Si le polynôme caractéristique de u admet une valeur propre réelle, c'est-à-dire u admet au moins une droite stable. Supposons que tel n'est pas le cas.

a) Considérons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ **la matrice** de u dans une base $\mathcal{B}$ de E.

En considérant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un vecteur propre $Z = X + iY$ de valeur propre $\lambda = a + ib$ non réelle.

On a $AZ = \lambda Z$, donc par identification des parties réelles et imaginaires, $\begin{cases} AX = aX - bY \\ AY = aY + aX \end{cases}$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(X, Y)$ est stable par A.

Comme Z n'est pas nul, F n'est pas réduit à $\{0\}$. Comme u et donc A n'admettent pas de droite stable, alors F n'est pas une droite. Donc F est un plan.

On note x et y les vecteurs tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x = X$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, y = Y$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(x, y)$ est un plan stable par u.

b) Notons $\chi_u = P_1 P_2 ... P_r$ la décomposition de χ_u en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme u n'a pas de droite stable, χ_u n' a pas de racine réelle et les P_j sont irréductibles de degré 2.

On a donc $P_1(u) \circ ... \circ P_r(u) = 0$. Donc il existe au moins un j tel que $\det P_j(u) = 0$.

Posons $P_j(x) = x^2 - ax - b$. Il existe donc un vecteur non nul $x \in \operatorname{Ker} P_j(u)$.

Alors $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u, car $u^2(x) \in F$, et F est un plan car $u(x) \notin \mathbb{R}x$.

2) Preuves du théorème spectral

a) Supposons $u(F) \subset F$.

La propriété $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ est vraie sur $E \times E$ donc a foritori sur F, donc $u_{|F}$ est symétrique.

On a pour tout $(x, y) \in F^\perp \times F$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, donc $u(x) \in F^\perp$, et $F^\perp$ est stable.

b) Considérons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

On a $\chi_A(x) = x^2 - (a+c) + ac - b^2 = (x - \frac{1}{2}(a+c))^2 - \Delta$, où $\Delta = \frac{1}{4}(a-c)^2 - b^2$.

Ainsi, χ_A admet deux racines réelles λ et μ, distinctes sauf si $a = c$ et $b = 0$, c'est-à-dire A homothétie.

Dans le cas où $\lambda \neq \mu$, A est donc diagonalisable et de plus E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Donc A est dans tous les cas orthosemblable à une matrice diagonale.

c) On raisonne par récurrence d'ordre 2 sur $n = \dim E$.

La propriété est immédiate pour $n = 1$ et vraie pour $n = 2$ d'après a).

Supposons $n \geq 3$ et soit $u \in S(E)$. Par la partie D, u admet une droite ou un plan F stable par u.

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ adaptée à $F \oplus F^\perp$, $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}\, u = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & S \end{array}\right)$, avec M et S symétriques (comme matrices d'endomorphismes symétriques) et où M est d'ordre 1 ou 2.

Par a), M est orthosemblable à une matrice diagonale. De même pour S par hyp de récurrence.

On conclut via une matrice de passage orthogonale de la forme $\left(\begin{array}{c|c} U & O \\ \hline O & U \end{array}\right)$, avec U et V orthogonales.

3) a) cf cours. Noter la nécessité d'utiliser $u(F) = F$.

La restriction de u à F est orthogonale car elle conserve aussi la norme.

b) On vérifie d'abord que les seules valeurs propres réelles de u sont 1 et -1, car $\|u(x)\| = \|x\|$.

Ensuite, les sev propres E_1 et E_{-1} sont en somme directe orthogonale (car $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$).

Posons $F = E_1 \oplus E_{-1}$.Comme F est stable par E, $G = F^\perp$ est stable par u et $u_{|G} \in O(G)$.

On est ainsi ramené à étudier le cas des transformations orthogonales n'admettant pas de valeur propre réelle.

Par la partie 1), il existe un plan stable, puis en appliquant l'hypothèse de récurrence sur l'orthogonal, on obtient $G = P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_m$ somme directe orthogonale de plans stables par u. Les restrictions de u aux P_j sont des trasnformations orthogonales sans valeur propre réelle et donc des rotations. Ce qui permet de conclure en considérant une BON adaptée à $E_1 \oplus E_{-1} \oplus P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_m$.

c) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. L'endomorphisme canoniquement associé à A est une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$ muni du psc, donc A est semblable à une matrice de la forme obtenue au b).

Les valeurs propres possibles sont donc 1, -1 et les $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, donc appartiennent à U.