TD entraînement n°5

Exercice A. Théorème du min-max

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u.

1) Montrer que $\lambda_n = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2}$, et préciser les cas d'égalité.

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Soit F un sev de E de dimension $\geq k$. Montrer que $\sup_{x \in F,\ x \neq 0} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_k$.

Indication : Considérer $G = \mathrm{Vect}(e_k, e_{k+1}, ..., e_n)$. Justifier que $F \cap G$ contient un vecteur *non nul* x.

3) En déduire que $\lambda_k = \inf_{F \text{ sev de dim } k} \left(\sup_{x \in F,\ x \neq 0} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} \right)$.

4) Soit $v \in \mathcal{S}^+(E)$ de rang 1. On note $\mu_1 \leq ... \leq \mu_n$ les valeurs propres de $w = u + v \in \mathcal{S}(E)$.

a) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \leq \mu_k$.

b) (★) Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n \leq \mu_n$.

Exercice B. Réduction des matrices symétriques réelles et des matrices orthogonales

1) Sev stables

Montrer que tout endomorphisme réel en dim finie ≥ 1 admet au moins une droite ou un plan stable.

On proposera deux preuves :

a) En utilisant un vecteur propre complexe $Z = X + iY$ de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) En utilisant un facteur irréductible du polynôme caractéristique (polynôme annulateur) :
Il existe nécessairement des réels λ, a, b tels que $(u - \lambda\,\mathrm{Id})$ ou $(u^2 + au + b\,\mathrm{Id})$ ne soit pas inversible.

2) Preuve du théorème spectral

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, c'est-à-dire vérifiant $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

a) Soit F un sous-espace vectoriel stable par u.
Montrer que la restriction de u à F est symétrique et que $F^\perp$ est stable par u.

b) Montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une BON.

c) En déduire le théorème spectral : u est diagonalisable dans une BON.

3) Réduction des transformations orthogonales

Soient E un espace euclidien et $u \in O(E)$ une transformation orthogonale.

a) Soit F un sous-espace vectoriel stable par u.
Montrer que la restriction de u à F est une transformation orthogonale et que $F^\perp$ est stable par u.

b) Soit $u \in O(E)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O_2^+(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & M(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & M(\theta_r) \end{pmatrix}$.

c) En déduire que les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonales appartiennent à U.