TD entraînement n°4. Corrigé

Exercice A

1) Par hypothèse, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = B$.

On a ainsi $AP = PB$. Posons $P = M + iN$, avec M et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En décomposant parties réelles et imaginaires (et comme A et B réelles), on a $AM = MB$ et $AN = NB$.

2) a) $D(t)$ est un polynôme en t (car le déterminant est un polynôme en les coefficients).

Par hypothèse, $P(i)$ n'est pas nul. Donc P n'est pas identiquement nul

On en déduit que P admet qu'un nombre fini de racines.

A fortiori, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $D(t) \neq 0$, c'est-à-dire $M + tN$ est inversible.

b) En posant $Q = M + tN$ inversible, on a bien $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et $AQ = QB$, c'est-à-dire $Q^{-1}AQ = B$.

Exercice B

1) Le polynôme caractéristique de A est réel et n'a pas de racine réelle (puisque A n'a pas de valeur propre réelle).

Donc son degré n est pair (les racines complexes sont 2 à 2 conjuguées).

2) a) Comme $\dim E = 2p$, il suffit de prouver que la famille $(X_1, Y_1, ..., X_p, Y_p)$ est libre.

Soient des réels $\alpha_k, .\beta_k$ tels que $\sum_{j=1}^{p} \alpha_k X_k + \sum_{j=1}^{p} \beta_k Y_k = 0$. Donc $\sum_{j=1}^{p} (\alpha_k + \frac{1}{i}\beta_k) Z_k + \sum_{j=1}^{p} (\alpha_k - \frac{1}{i}\beta_k) \overline{Z_k} = 0$.

Comme $(Z_1, \overline{Z_1}, ..., Z_p, \overline{Z_p})$ est libre, alors $\forall k$, $\alpha_k + i\beta_k = 0 = \alpha_k - i\beta_k$, donc $\forall k$, $\alpha_k = \beta_k = 0$.

b) On a $AZ_k = \lambda_k Z_k$, c'est-à-dire en identifiant par parties, $\begin{cases} AX_k = a_k X_k - b_k Y_k \\ AY_k = b_k X_k + a_k Y_k \end{cases}$

Dans la base $(X_1, -Y_1, ..., X_p, -Y_p)$, la matrice de u est la matrice diagonale par blocs d'ordre 2, où le k-ième bloc est la matrice $\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$.

3) *Première méthode* : on applique 2) avec $\lambda_k = i$, donc $a_k = 0$ et $b_k = 1$. D'où le résultat.

Seconde méthode : Supposons $A^2 + I_n = O_n$. Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}(A) \in \{-i, i\}$.

De plus, les sev propres ont la même dimension p, car i et $-i$ sont racines de même ordre p de χ_A.

Or, la matrice B diagonale par blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie la même propriété de diagonalisation.

Ainsi, A et B sont semblables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et donc par l'exo A sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'où le résultat.

4) a) Comme u n'a pas de valeur propre réelle, alors $u(x) \notin \mathbb{R}x$, donc $(x, u(x))$ libre.

Soit $y \in F \cap \mathrm{Vect}(x, u(x))$. On a $y = \alpha x + \beta u(x)$.

Comme F est stable, alors $u(y) = \alpha u(x) - \beta x \in F$. D'où $(\alpha^2 + \beta^2)x \in F$. Donc $\alpha = \beta = 0$, et $y = \overrightarrow{0}$.

b) On construit par récurrence une famille libre de la forme $(x_1, u(x_1), ..., x_k, u(x_k))$.

On applique en effet à chaque itération a) au sev stable $F = \mathrm{Vect}(x_1, u(x_1), ..., x_k, u(x_k))$.

Comme E est de dimension finie, le processus aboutit en un nombre fini d'étapes.

Donc $\dim E = n$ est pair, et on obtient une base $\mathcal{B}$ de E de la forme $(x_1, u(x_1), ..., x_p, u(x_p))$.

La matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est bien la matrice B, car $u(u(x_k)) = -x_k$.

Exercice C

1) Par dimension, la famille $(x, u(x), ..., u^n(x))$ est liée.

Donc il existe un plus petit entier naturel $p \leq n$ tel que $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est liée.

2) Alors $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre, donc $u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$: en effet, un des vecteurs de la famille $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est combinaison linéaire des précédents, et c'est donc nécessairement $u^p(x)$.

Le sev F est donc stable car $u(F) = \mathrm{Vect}(u(x), ..., u^p(x)) \subset F$ et que $u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$.

Comme $\mathcal{B}$ est libre, $\mathcal{B}$ est une base de $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

3) On considère v la restriction de u à $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$.

La matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice compagnon M, où $u^p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$.

On sait que $\chi_v(X) = X^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$. Donc $\chi_v(u)(x) = \overrightarrow{0}$.

Or, par a), χ_v divise χ_u, c'est-à-dire $\chi_u(X) = Q(X)\chi_v(X)$. Donc $\chi_u(u) = Q(u) \circ \chi_v(u)$, donc $\chi_u(u)(x) = \overrightarrow{0}$.