TD entraînement n°3. Corrigé

Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange

1) a) On considère $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$ les zéros de φ.

Par Rolle, φ' admet au moins un zéro dans chaque intervalle $]a_{k-1}, a_k[$, avec $1 \leq k \leq n$.

Comme les intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ sont deux à deux disjoints, ces n zéros sont distincts.

b) Par récurrence simple sur $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, on montre avec a) que $\varphi^{(k)}$ admet au moins $(n-k+1)$ zéros.

Donc $\varphi^{(n)}$ admet au moins un zéro.

2) a) On prend $\lambda = \dfrac{g(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}$.

b) φ s'annule en les a_k et en x, donc par 2) que $\varphi^{(n)}$ admet au moins un zéro $c \in I$.

c) Comme $t \longmapsto (t-a_1)(t-a_2)...(t-a_n)$ est un polynôme unitaire de degré n, sa dérivée n-ième vaut $n!$

Donc $\varphi^{(n)}(t) = g^{(n)}(t) - \lambda.n!$, d'où $\lambda = \dfrac{g^{(n)}(c)}{n!}$.

Comme $\varphi(x) = 0$, on obtient $g(x) = \dfrac{g^{(n)}(c)}{n!}(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$.

3) La fonction $g : x \longmapsto f(x) - P_n(x)$ s'annule en les $(n+1)$ points a_k. On déduit de 3) (en remplaçant n par $(n+1)$) que pour tout $x \in I \setminus \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{g^{(n+1)}(c)}{n!}\ (x-a_0)(x-a_1)...(x-a_n)$$

Enfin, on a $g^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, d'où le résultat pour tout $x \in I \setminus \{a_0, a_1, ..., a_n\}$.

La propriété est immédiate pour $x \in \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, car dans ce cas les deux termes sont nuls (tout c convient).

4) Vu 3), il suffit de prouver que $\forall x \in [0,1]$, $\left|\prod_{k=0}^n \left(x - \dfrac{k}{n}\right)\right| \leq \dfrac{n!}{n^{n+1}}$.

Soit $x \in [0,1]$. Il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $\dfrac{p-1}{n} \leq x \leq \dfrac{p}{n}$.

Pour $0 \leq k \leq p-1$, on a $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leq \dfrac{p-k}{n}$, et pour $p \leq k \leq n$, $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leq \dfrac{k-p+1}{n}$.

Donc $\left|\prod_{k=0}^n \left(x - \dfrac{k}{n}\right)\right| \leq \left(\prod_{k=0}^{p-1} \dfrac{p-k}{n}\right) \times \left(\prod_{k=p}^n \dfrac{k-p+1}{n}\right) = \dfrac{p!(n+1-p)!}{n^{n+1}}$.

Or, $\binom{n+1}{p} \geq (n+1)$, donc $\dfrac{p!(n+1-p)!}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{n+1}$, c'est-à-dire $p!(n+1-p)! \leq n!$. D'où le résultat.

5) Surtout ne pas chercher à calculer Q_n par la formule bien connu avec les polynômes de Lagrange !!!

Par la formule, on a bien que $P_n(a_i) = f(a_i)$ et $P_n(-a_i) = f(-a_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Il s'agit donc maintenant de prouver que P_n est un polynôme et que son degré est $< 2n$.

Posons $Q_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(\dfrac{a_i^2 - x^2}{a_i^2 + \alpha^2}\right)$. On a $\deg Q_n \leq 2n$.

Il reste à prouver que $X^2 + \alpha^2$ divise Q_n. Il suffit pour cela de vérifier que $Q_n(\alpha i) = Q_n(-\alpha i) = 0$, ce qui est aisé.

On en déduit que P_n est un polynôme de degré $\leq 2n-2$. D'où le résultat.

6) a) $\prod_{i=1}^n (1-a_i^2) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \dfrac{i}{n+1}\right)\left(1 + \dfrac{i}{n+1}\right) = \dfrac{A}{(n+1)^{2n}}$, En multipliant numérateur et dénominateur par $(n+1)$, on obtient bien $\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)^{2n+1}}$.

b) On a $(2n+1)! \sim \sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)} \sim \sqrt{4\pi n}(2n)^{2n+1}e^{-2n}$, car $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n+1} \to e$.

Et $(n+1)^{2n} \sim e^2 n^{2n}$.

Donc finalement, $\prod_{i=1}^n \left(1-a_i^2\right) \sim \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n+1}e^{-2n}}{e^2 n^{2n}} = \sqrt{\pi n}\left(\dfrac{2}{e}\right)^{2n+2}$.

7) a) $\dfrac{1}{n}\ln\left(R_n(\alpha)\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left(\left(\dfrac{i}{n}\right)^2 + \alpha^2\right)$ est une somme de Riemann de $\varphi(t) = \ln(t^2+\alpha^2)$.

Comme φ est continue sur $[0,1]$, alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(R_n(\alpha)\right) = \int_0^1 \ln(t^2+\alpha^2)\ dt$.

b) Par IPP, on a $J(\alpha) = \left[t\ln(t^2+\alpha^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{2t^2}{t^2+\alpha^2}\ dt$.

On a $\dfrac{2t^2}{t^2+\alpha^2} = 2 - \dfrac{2\alpha^2}{t^2+\alpha^2}$, et $\int_0^1 \dfrac{\alpha^2}{t^2+\alpha^2}\ dt = \alpha\int_0^1 \dfrac{dt/\alpha}{(t/\alpha)+1}\ dt = \alpha\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

On en déduit $J(\alpha) = \ln(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

Donc $\lim_{\alpha\to 0,\alpha>0} J(\alpha) = 0 - 2 + 2\times\dfrac{\pi}{2} = -2$.

8) On a $|f_n(1) - P_n(1)| = \dfrac{A_n}{R(\alpha)}$.

On a $A_n = \sqrt{\pi n}\left(\dfrac{2}{e}\right)^{2n+2}(1+\mathfrak{o}(1))$, donc $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln A_n = 2\ln\left(\dfrac{2}{e}\right)$.

Comme $2\ln\left(\dfrac{2}{e}\right) = 2\ln 2 - 2 > -2$, alors pour $\alpha > 0$ assez petit, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}(\ln A_n - \ln R_n(\alpha)) > 0$.

Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty}(\ln A_n - \ln R_n(\alpha)) = +\infty$, et ainsi $\lim_{n\to+\infty}|f_n(1) - P_n(1)| = +\infty$.