TD entraînement n°3

Exercice A. Matrices à diagonale dominante

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un vecteur **non nul** $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = 0$.

Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

2) On suppose que A est à diagonale dominante, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Montrer que A est inversible.

Exercice B. Matrices de trace nulle

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, on pose $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, appelé trace de A.

1) Soient F un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de F.

a) On suppose qu'il existe x et y deux vecteurs non nuls, et λ et μ deux scalaires **distincts**, tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$. On considère $z = x + y$. Montrer que $u(z)$ n'est pas colinéaire à z.

b) On suppose que u n'est pas une homothétie vectorielle.

En utilisant a), montrer qu'il existe un vecteur $x \in F$ tel que $u(x)$ n'est pas colinéaire à x.

2) a) Soit A une matrice de trace nulle, avec A non nulle. On note u l'endomorphisme de K^n associé à A.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de K^n telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ soit de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad A_1 \quad} \\ 0 & \end{array}\right)$

où L est un vecteur ligne et A_1 une matrice carrée d'ordre $(n-1)$.

b) Démontrer que toute matrice A de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Indication **:** Utiliser des matrices de passage de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q \end{array}\right)$.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux.

3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} M = \operatorname{tr} M$.

a) Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $N = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline B & O \end{array}\right)$, où les coefficients diagonaux de la sous-matrice carrée A valent tous 1.

b) *Question supplémentaire.* En déduire que M est somme de matrices de projection.

Indication : Noter que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} E_{ij}\right)^2 = a_{jj} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} E_{ij}\right)$.