TD entraînement n°2. Corrigé

Exercice A

1) On a $B_1 = X - \int_0^1 t\ dt = X - \frac{1}{2}$ et $B_2 = X^2 - X - \int_0^1 (t^2 - t)\ dt = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

Remarque : Soit $n \geq 1$. Supposons que B_{n-1} existe et notons A_n une primitive de B_{n-1}.

Par la relation $B_n' = nB_{n-1}$, le polynôme B_n est défini à une constante près :

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B_n = nA_n + \lambda$.

$\int_0^1 B_n(t)dt = 0$ ssi $\lambda = n \int_0^1 A_n(t)dt$. Donc B_n est entièrement déterminé par B_{n-1}.

Par le principe de définition d'une suite par récurrence, on en déduit qu'il existe bien une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés de l'énoncé

2) Par deux intégrations par parties successives, on obtient :

$R_0 = \int_0^1 f(t)B_0(t)\ dt = [f(t)B_1(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)B_1(t)\ dt = [f(t)B_1(t)]_0^1 - \frac{1}{2}[f'(t)B_2(t)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)B_2(t)\ dt.$

Or, on a : $[f(t)B_1(t)]_0^1 - \frac{1}{2}[f'(t)B_2(t)]_0^1 = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) - \frac{1}{12}\left(f'(1) - f'(0)\right).$

On obtient finalement : $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) - \frac{1}{12}(f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)B_2(t)\ dt.$

3) Une étude de la fonction $B_2 : [0,1] \to \mathbb{R}\ \ t \longmapsto t^2 - t + \frac{1}{6}$ montre que son image est $[\frac{-1}{12}, \frac{1}{6}]$.

On en déduit que pour tout $t \in [0,1]$, on a $|B_2(t)| \leq \frac{1}{6}$.

4) a) On applique la formule du 2) à la fonction $f(t) = g(t+k)$, où $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

On a : $\int_k^{k+1} g(t)\ dt = \int_0^1 g(t+k)\ dt = \frac{1}{2}\left(g(k) + g(k+1)\right) - \frac{1}{12}(g'(k+1) - g'(k)) + \frac{1}{2}\int_0^1 g''(t+k)B_2(t)\ dt.$

En sommant les égalités de $k = 1$ à $(n-1)$, on obtient :

$$\int_1^n g(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(g(k) + g(k+1)\right) - \frac{1}{12}(g'(n) - g'(1)) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 g''(t+k)B_2(t)\ dt$$

Comme $\sum_{k=1}^{n-1}\left(g(k) + g(k+1)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} g(k) - \frac{1}{2}(g(1) + g(n))$, on obtient en réordonnant les termes :

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \int_1^n g(t)\ dt + \frac{1}{2}(g(1) + g(n)) + \frac{1}{12}(g'(n) - g'(1)) + R_n$$

avec

$$R_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 g''(t+k)B_2(t)\ dt$$

Par l'inégalité de la moyenne et par 1), on a $\left|\int_0^1 g''(t+k)B_2(t)dt\right| \leq \frac{1}{6}\int_0^1 |g''(t+k)|\ dt.$

Donc

$$|R_n| \leq \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \left|g''(t+k)\right| dt = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left|g''(t)\right| dt = \frac{1}{12}\int_1^n \left|g''(t)\right| dt.$$

b) On prend $g(t) = \sqrt{t}$. On a, par b), $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \int_1^n \sqrt{t}dt + \frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{n}) + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) + R_n$,

avec $|R_n| \leq -\frac{1}{12}\int_1^n g''(t)dt = \frac{1}{12}(g'(1) - g'(n)) \leq \frac{1}{12}(g'(1) = \frac{1}{24}$.

Donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + S_n$$

avec $|S_n| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24}$, donc $S_n = O(1)$.

Exercice B

1) On peut écrire $\sum_{i=1}^p \mu_i a_i = \overrightarrow{0}$ en coordonnées : on obtient un système de n équations.

Donc le système $\sum_{i=1}^p \mu_i a_i = \overrightarrow{0}$ et $\sum_{i=1}^p \mu_i = 0$ est un système de $(n+1)$ équations et p inconnues.

Comme $p > n+1$, le système admet une solution non nulle.

2) Rappel : x est valeur moyenne des b_i, avec $1 \leq i \leq m$ ssi il existe $(\alpha_i)_{1\leq i\leq m}$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i, \text{ avec } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1,m]\!],\ \alpha_i \geq 0$$

Ici, on a $\boxed{x = \sum_{i=1}^p (\lambda_i - \theta\mu_i)a_i}$ et $\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \theta\mu_i) = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

On souhaite trouver θ tel que $\forall i$, $\lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$ et $\exists\, i$, $\lambda_i - \theta\mu_i = 0$.

On note Δ l'ensemble non vide des $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $\mu_i > 0$ (il est non vide car $\sum \mu_i = 0$),

On prend $j \in \Delta$ tel que $\frac{\lambda_j}{\mu_j}$ soit minimum.

On prend $\theta = \frac{\lambda_j}{\mu_j}$. On a alors $\lambda_j - \theta\mu_j = 0$ et $\forall i$, $\lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$ (si $\mu_i < 0$, $\lambda_i - \theta\mu_i \geq \lambda_i \geq 0$).

On écrit ainsi x comme barycentre d'au plus $(p-1)$ points a_i.

Remarque : Ainsi, la valeur minimale de p vérifie $p \leq n+1$, ce qui justifie la propriété énoncé en préambule.

3) On considère $T = \{(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ \lambda_i \geq 0\}$.

La partie T est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ (= borné et stable par passage à la limite).

Donc $K = A^{n+1} \times T$ est un compact de $(\mathbb{R}^n)^{n+1} \times \mathbb{R}^{(n+1)}$.

On considère f définie sur $K = A^{n+1} \times T$ par

$$f\left((a_0, ..., a_n), (\lambda_0, ..., \lambda_n)\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$$

Par 2), $f(K) = C(A)$ et par Weierstrass, $f(K)$ est un compact. D'où le résultat.