TD entraînement n°2

Exercice A. Cas particulier de la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin

1) On sait qu'il *existe une et une seule* suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant $B_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 1,\ B_n' = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t)dt = 0$$

Déterminer B_1 et B_2. On note que $B_2(0) = B_2(1) = \dfrac{1}{6}$.

2) Dans cette question, f est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) - \frac{1}{12}(f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)B_2(t)\ dt$$

3) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a $|B_2(t)| \leq \dfrac{1}{6}$.

4) a) Soit g est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.

En appliquant ce qui précède à des fonctions bien choisies, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \int_1^n g(t)dt + \frac{1}{2}(g(1) + g(n)) + \frac{1}{12}(g'(n) - g'(1)) + R_n \text{ , avec } |R_n| \leq \frac{1}{12}\int_1^n \left|g''(t)\right| dt$$

b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + O(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice B. Lemme de Kakutani

Soit A une famille (finie) d'éléments de $E = \mathbb{R}^n$.

L'enveloppe convexe $C(A)$ de A est l'ensemble des valeurs moyennes d'éléments de A. On se propose de montrer que tout élément de $C(A)$ peut s'écrire comme valeur moyenne d'au plus $(n+1)$ éléments de A.

Supposons donc $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$, avec $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $\boxed{p \geq n+2}$.

1) Montrer qu'il existe $(\mu_1, ..., \mu_p) \neq (0, ..., 0)$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i = \overrightarrow{0}$ et $\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$.

2) Montrer que x peut s'écrire comme valeur moyenne de $(p-1)$ éléments parmi les a_i.

Indication : On pourra considérer $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i)a_i$ avec θ bien choisi.

3) *Question supplémentaire*

Montrer que si A est compact (= fermé borné), alors $C(A)$ est compact.

On suppose connue la propriété de Weierstrass (généralisée) : l'image par une fonction continue $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ d'un compact K de $\mathbb{R}^m$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.