TD entraînement n°1. Corrigé partiel

Exercice A

1) $|\langle f, g_1\rangle - \langle f, g_2\rangle| = \left|\int_0^1 f(x)(g_1(x) - g_2(x))\ dx\right| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty \int_0^1 |f| = \|g_1 - g_2\|_\infty$, car $\int_0^1 |f| = \int_0^1 f = 1$.

2) On a $c \leq \int_0^1 f = 1$.

3) Posons $F = f - c$. On a donc F positive et $\int_0^1 F(x)\ dx = 1 - c$.

Comme $\int g_1 = \int g_2 = 1$, alors $\langle f, g_1\rangle - \langle f, g_2\rangle = \int_0^1 (f(x) - c)g_1(x) - (f(x) - c)g_2(x)\ dx$.

On a $\int_0^1 |f(x) - c|\ dx = \int_0^1 (f(x) - c)\ dx = 1 - c$.

Par le même calcul qu'au a), on obtient $|\langle f, g_1\rangle - \langle f, g_2\rangle| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty \int_0^1 |F| = (1 - c)\,\|g_1 - g_2\|_\infty$.

Exercice B. Dérivation discrète dans les polynômes

1) d) Les solutions de l'équation linéaire $P(X+1) - P(X) = Q$ sont $P_0 + \operatorname{Ker}\delta$, où P_0 est une solution particulière.

Comme $\operatorname{Ker}\delta = \mathbb{R}_0[X]$ sev des polynômes constants, il y a unicité si on impose $P(0)$.

2) a) On a $\deg R_p = p$ et le coefficient dominant est $\dfrac{1}{p+1}$.

b) Par a), on a $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = \sum_{k=1}^n (R_p(k) - R_p(k-1)) = R_p(n) - R_p(0) = R_p(n)$.

Donc $S_p(n)$ est bien un polynôme en n de degré $(p+1)$.

3) *Formule de Taylor algébrique discrète.*

a) Par 1) d), la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement définie par récurrence.

b) *Première méthode* : Par identification.

Posons $n = \deg P$. La famille $(H_k)_{0\leq k\leq n}$ est de degrés échelonnés, donc forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k H_k(X)$.

En itérant p fois par δ, on obtient $\delta^p(P)(0) = \sum_{k=p}^n \lambda_k H_{k-p}(X)$.

En prenant la valeur en 0, on obtient $\delta^p(P)(0) = \lambda_p H_0(0) = \lambda_p$.

Seconde méthode : Par récurrence sur $n = \deg P$.

On applique l'hypothèse de récurrence à $\delta(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^{n+1}(P)(0)\ H_n(X)$.

Par linéarité de δ, on a donc $\delta(P) = \delta(Q)$, où $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^{n+1}(P)(0)\ H_{n+1}(X)$.

Donc $P - Q \in \operatorname{Ker}\delta$, donc $P - Q = \lambda$ constante. Comme $Q(0) = 0$, alors $\lambda = P(0)$.

Donc $P = P(0) + Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n(P)(0)\ H_n(X)$.