TD entraînement n°1

Exercice A (*inspiré du sujet écrit X 2023*)

On note E l'ensemble des fonctions continues f définies de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall x \in [0,1], \ \ f(x) \geq 0 \ \text{ et } \ \int_0^1 f(x)\ dx = 1$$

Soient $\boxed{f \text{ et } g \in E}$. On pose $\forall x \in [0,1]$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$ et $\|g\|_\infty = \sup_{[0,1]} |g|$.

1) Soient g_1 et $g_2 \in E$. Montrer que $|\langle f, g_1\rangle - \langle f, g_2\rangle| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty$.

Soit $f \in E$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq c$.

2) Montrer que $c \leq 1$.

3) Soient f, g_1 et $g_2 \in E$. Montrer que $|\langle f, g_1\rangle - \langle f, g_2\rangle| \leq (1-c)\|g_1 - g_2\|_\infty$.

Exercice B. Dérivation discrète dans les polynômes

1) On considère l'endomorphisme $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$. Préciser le noyau de δ.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut donc définir l'endomorphisme $\delta_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ restriction de δ à $\mathbb{R}_n[X]$.
Expliciter la matrice de δ_n dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$.

d) Montrer que P est unique si on impose de plus $P(0) = 0$.

2) a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note R_p le polynôme tel que $R_p(X+1) - R_p(X) = X^p$ et $R_p(0) = 0$.
Préciser le degré et le coefficient dominant de R_p.

b) On pose $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$ la somme des puissances p-ième des entiers de 1 à n.
Par exemple, $S_0(n) = n$, $S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ et $S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Montrer que $S_p(n)$ est un polynôme en n de degré $(p+1)$.

3) *Formule de Taylor algébrique discrète.*

a) Justifier qu'il existe une unique suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $H_0 = 1$ et $\delta(H_{n+1}) = H_n$ et $H_{n+1}(0) = 0$.

Remarque culturelle : En fait, on peut montrer que $H_n = \frac{1}{n!}X(X-1)...(X-n+1)$.

b) (★) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n(P)(0)\ H_n(X)$.

Remarque : La somme est finie car $\delta^n(P)$ est nul pour tout entier $n > \deg P$.