

Révision n°3. Exercice de probabilités. Corrigé

1. Posons $u_n = \frac{n^r z^n}{n!}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0$. Par d'Alembert, la série converge pour tout z .

2. On utilise le théorème du transfert : On a $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^r}{x^r} P(Y_x = n) = \frac{n^r}{n!} x^{n-r} e^{-x}$.

La série $\sum \frac{n^r}{n!} x^{n-r} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^r} \sum \frac{n^r}{n!} x^n$ converge d'après la question 1).

Par le théorème du transfert, $(Z_x)^r$ est donc d'espérance finie, et $E((Z_x)^r) = \frac{e^{-x}}{x^r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n$.

Comme r n'est pas nul, le terme en $n = 0$ est nul. Donc $E((Z_x)^r) = \frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x)$.

3. On sait par le cours que $E(X_x) = V(X_x) = x$.

Donc $E(Z_x) = 1$ et $V(Z_x) = \frac{1}{x}$. On utilise alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}) \leq \frac{V(Z_x)}{x^{-2/3}} = \frac{1}{x^{1/3}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty$$

4. On a $P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = P((Z_x)^r \geq (1 - x^{-1/3})^r)$, car tous les termes considérés sont positifs.

Par l'inégalité de Markov, $P((Z_x)^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq \frac{E((Z_x)^r)}{(1 - x^{-1/3})^r}$, qui est l'inégalité demandée.

D'autre part, $P(Z_x < 1 - x^{-1/3}) \leq P(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3})$. Par 3), on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(Z_x < 1 - x^{-1/3}) = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = 1$. On conclut en notant qu'on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{-1/3})^r = 1$.

5. Considérons $H_N(Z) = \prod_{k=0}^{N-1} (Z - k)$ polynôme d'indéterminée z . On a $Y_{x,N} = H_N(X_x)$.

On considère la série $\sum_{n=0}^{+\infty} H_N(n) P(X_n = n) = \sum n(n-1)\dots(n-N+1) \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

Cette série converge, donc par le théorème du transfert, $Y_{x,N}$ est d'espérance finie.

On a $E(Y_{x,N}) = \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-N+1) \frac{x^n}{n!} e^{-x} = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{x^{n-N}}{(n-N)!} e^{-x} = x^N \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} e^{-x} = x^N$.

Mieux : On a en fait pour toute v.a. entière de moment d'ordre N fini :

$E(H_N(X)) = G_X^{(N)}(1)$, car $\forall t \in [-1, 1]$, $G_X^{(N)}(t) = \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-N+1) P(X = n) t^{n-N}$.

Ici, $G_{X_x}(t) = \exp(x(t-1))$, donc $G_X^{(N)}(1) = x^N$.

6. Les polynômes $H_0, \dots, H_N$ sont des polynômes de degrés échelonnés, donc forment une base de $\mathbb{R}_N[Z]$.

Donc $Z^N \in \text{Vect}(H_0, H_1, \dots, H_N)$, c'est-à-dire qu'il existe $(a_k)_{1 \leq k \leq N}$ tels que $Z^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k(Z)$.

En considérant les termes en Z^N , on a $a_N = 1$. Comme $Z^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k(Z)$, alors $(X_x)^N = \sum_{k=0}^N a_k Y_{x,k}$.

b) On a $E((Z_x)^N) = \frac{1}{x^N} \sum_{k=0}^N a_k E(Y_{x,k})$.

Or, par 5), on a $E(Y_{x,k}) = x^k$. Donc $E((Z_x)^N) = \frac{1}{x^N} \sum_{k=0}^N a_k x^k = a_N + O_{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 1 + O_{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$.

7. a) On étudie la fonction $\varphi : t \mapsto t^s - s(t-1) - 1$ sur $]0, +\infty[$.

On a $\varphi'(t) = s(t^{s-1} - 1)$. Comme $s-1 < 0$, alors φ décroît sur $]0, 1]$ et croît sur $[1, +\infty[$.

Comme $\varphi(1) = 1$, alors φ est positive.

Remarque : En fait, φ est convexe ($\varphi'' > 0$), donc φ est au-dessus de sa tangente en $t = 1$.

b) On a donc $(Z_x)^r = (Z_x)^N (Z_x)^s \leq s(Z_x)^N (Z_x - 1) + (Z_x)^N = (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}$.

8. Par 6), on a $\forall N \in \mathbb{N}, E((Z_x)^N) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1} = 1$.

En utilisant les inégalités du 7) b) et du 4), on obtient par pincement $\lim_{x \rightarrow +\infty} E((Z_x)^r) = 1$.

Par 2), $E((Z_x)^r) = \frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x)$, donc $S_r(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^r e^x$.