

Exercice de probabilités (*extrait Mines PC*)

Soient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une famille $(X_x)_{x>0}$ de variables aléatoires à valeurs entières telle que pour tout $x > 0$, la variables aléatoire X_x suit la loi de Poisson de paramètre x .

Dans tout le sujet, r désigne un réel positif non nul : $r > 0$. On pose $\forall x > 0, Z_x = \frac{X_x}{x}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $Y_{x,N} = X_x(X_x - 1) \dots (X_x - N + 1) = \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k)$. En particulier, $Y_{x,0} = 1$.

1. On pose $S_r(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} z^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Montrer que $(Z_x)^r$ est d'espérance finie et exprimer $E((Z_x)^r)$ en fonction de $S_r(x)$.
3. Rappeler sans justification l'espérance et la variance de X_x .

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}) = 0$

4. a) Montrer que pour tout $x > 1$, on a

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq E((Z_x)^r)$$

- b) Montrer par ailleurs que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = 1$$

5. Montrer que $Y_{x,N}$ est d'espérance finie et que $E(Y_{x,N}) = x^N$.

Remarque : Il est conseillé de faire intervenir la série génératrice $G_{X_x}(t)$ de X_x .

6. a) Montrer qu'il existe une famille $(a_k)_{0 \leq k \leq N}$ de réels tels que

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, (X_x)^N = \sum_{k=0}^N a_k Y_{x,k}$$

Indication : Faire intervenir les polynômes $H_j(Z) = \prod_{k=0}^{j-1} (Z - k)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et d'indéterminée Z .

- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} E((Z_x)^N) = 1$.

7. a) On pose $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, t^s \leq s(t - 1) + 1$.

- b) En déduire que $\forall x > 0, (Z_x)^r \leq (1 - s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}$.

8. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} E((Z_x)^r) = 1$ et en déduire un équivalent de $S_r(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.