

Révision n°2. Développements eulériens. Corrigé

1.a)

On pose $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ si $t \leq n$, et $f_n(t) = 0$ si $t \geq n$.

On a pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = t^{x-1} e^{-t}$.

Comme $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$, alors $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq t^{x-1} e^{-t}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) \leq \varphi(t)$, où $\varphi(t) = t^{x-1} e^{-t}$.

L'application φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (on suppose connue la fonction Γ , qui est au programme).

Par convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$.

1.b)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$, avec le changement de variable $u = \frac{t}{n}$.

En intégrant n fois par parties, on a $\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} du$.

On obtient donc $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$. On conclut par a).

2.

On a $\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{-2} = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1)$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.

De même, $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} \frac{1 + o(x)}{1 + o(x)} = \frac{1}{x} (1 + o(x)) = \frac{1}{x} + o(1)$.

Donc $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = o(1)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = 0$.

3.a)

Posons $u_n(x) = \frac{1}{(x - n\pi)^2}$, bien définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Pour x fixé, $u_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$, donc la série converge.

Soient $m \in \mathbb{Z}$. Soit un segment $[a, b] \subset]m\pi, (m+1)\pi[$.

Alors $\forall n \geq m+1$, $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{(a - n\pi)^2}$ et pour tout $n \leq m$, $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{(b - n\pi)^2}$.

Donc les séries $\sum_{n>m} u_n(x)$ et $\sum_{n \leq m} u_n(x)$ convergent normalement sur $[a, b]$.

On en déduit que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

3.b)

$S(x + \pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x + \pi - n\pi)^2} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x + m\pi)^2}$, avec le changement de variable $m = n - 1$.

Donc $S(x + \pi) = S(x)$, c'est-à-dire S est π -périodique.

3.c)

Par a), f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Par b), f est π -périodique. Donc pour prouver que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que f est prolongeable par continuité en $x = 0$.

On a $S(x) = \frac{1}{x^2} + R(x)$, avec $R(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(x - n\pi)^2}$.

Par le même raisonnement qu'au 3.a), R est continue sur $] -\pi, \pi[$.

Par 1), $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = \frac{1}{3} - R(0)$. Donc f prolongeable par continuité en $x = 0$. D'où le résultat.

4.a)

Il est essentiel de noter que si $x \in [-a, a]$, alors $\frac{x}{2} \in [-a, a]$ et $\frac{x + \pi}{2} \in [-a, a]$, car $\pi \in [-a, a]$.

On en déduit que $\forall x \in [-a, a]$, $|f(x)| = \frac{1}{4} \left| f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \right| \leq \frac{2M_a}{4} = \frac{M_a}{2}$.

Donc $M_a \leq \frac{M_a}{2}$, et on en conclut $M_a = 0$.

4.b)

Comme $\mathbb{R}$ est la réunion des $[-a, a]$, avec $a \geq \pi$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

5.

On considère la fonction f définie au 3.

On peut noter que pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $\frac{x}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ et $\frac{x + \pi}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$.

On vérifie que $x \mapsto \left(\frac{1}{\sin x} \right)^2$ et $x \mapsto S(x)$ vérifient la relation du 4) :

En effet, on a d'une part

$$\left(\frac{1}{\sin(x/2)} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin(x/2 + \pi/2)} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sin(x/2)} \right)^2 + \left(\frac{1}{\cos(x/2)} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sin(x/2) \cos(x/2)} \right)^2$$

Or, $\sin(x/2) \cos(x/2) = \frac{1}{2} \sin(x)$, donc $\left(\frac{1}{\sin(x/2) \cos(x/2)} \right)^2 = 4 \left(\frac{1}{\sin(x)} \right)^2$.

Et d'autre part, $S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x + \pi}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(x - 2n\pi)^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(x - (2n + 1)\pi)^2} = 4S(x)$.

Par linéarité, f vérifie la relation sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Par continuité de f et par passage à la limite, f vérifie la relation sur $\mathbb{R}$.

Par 4.b), f est identiquement nulle. D'où le résultat.

6.a)

$$\phi_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

On a $\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc il existe

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

6.b)

Pour tout $x \in [-m\pi, m\pi]$, $\forall n > m$, $\left| \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \right| \leq \frac{2m\pi}{(n^2 - m^2)\pi^2}$.

On en déduit que $x \mapsto \sum_{n>m} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ est continue sur $[-m\pi, m\pi]$.

Donc Φ est continue sur $] -m\pi, m\pi[\setminus \pi\mathbb{Z}$ (on ajoute une somme finie de fonctions continues).

Comme m est arbitraire, Φ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Montrons que Φ est π -périodique.

$$\text{On a } \Phi_N(x + \pi) = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{x + \pi - n\pi} \right) = \Phi_N(x) - \frac{1}{x - N\pi} + \frac{1}{x + (N+1)\pi}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\Phi(x + \pi) = \Phi(x)$.

7

$$\text{On a } \forall x \in]0, \pi[, \left(\frac{1}{\sin x} \right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2}.$$

La série de fonctions du second membre converge normalement sur tout segment.

On peut donc intégrer terme à terme sur $[0, x]$, où $x \in]-\pi, \pi[$.

$$\text{On obtient : } \forall x \in]0, \pi[, -\frac{\cos x}{\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(x - n\pi)} + K, \text{ où } K \text{ est constante.}$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in]0, \pi[, \frac{\cos x}{\sin x} = \Phi(x) + K, \text{ où } K \text{ est constante.}$$

$$\text{On a } \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + R(x) + K, \text{ où } R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

La convergence de la dernière est normale au voisinage de 0, donc R est continue en 0.

$$\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\cos x}{\sin x} = 0. \text{ Comme } R(0) = 0, \text{ alors } K = 0.$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0, \pi[, \frac{\cos x}{\sin x} = \phi(x).$$

Comme les deux membres de l'équation sont π -périodiques, la relation est vraie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

8.

$$\text{On a } \forall x \in]0, \pi[, g(x) > 0 \text{ et } \ln g(x) = \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right).$$

$$\text{La série converge car } \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

$$\text{La série des dérivées } \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} \text{ converge normalement (par la partie II).}$$

Donc $\ln g$ est de classe C^1 , donc $g = \exp(\ln g)$ est de classe C^1 .

$$\text{On a ainsi } \frac{g'(x)}{g(x)} = (\ln g)'(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} = \Phi(x).$$

8.b)

On a $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$ est continue en 0.

Donc $x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$ est continue en 0 (et vaut 1 en $x = 0$). On en déduit $g(x) \sim x$ en $x = 0$.

8.c)

La relation est vraie en $x = 0$. Les deux termes de l'équation sont des fonctions impaires en x .

Donc il suffit de prouver la relation sur $]0, \pi[$.

Or, on a par 5), $\frac{\sin' x}{\sin x} = \frac{g'(x)}{g(x)}$, c'est-à-dire $(\ln \sin)'(x) = (\ln g)'(x)$.

Donc il existe une constante $K > 0$ tel que $\forall x \in]0, \pi[, \sin(x) = Kg(x)$.

Or, $\sin(x) \sim x$ et $g(x) \sim x$ en $x = 0$. Donc $K = 1$. D'où le résultat.

9.

Soit $x \in]0, 1[$. On a bien $x > 0$ et $1 - x > 0$.

Par 1, on a : $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$. et $\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-x} n!}{(1-x)(2-x) \dots (n-x)(n+1-x)}$.

Donc $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1-x)} \frac{(n!)^2}{(n-x) \dots (1-x)x(1+x) \dots (n+x)}$.

Or, $\frac{(n-x) \dots (1-x)x(1+x) \dots (n+x)}{(n!)^2} = x \prod_{k=1}^n \left(\frac{k^2 - x^2}{k^2} \right) = x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$.

On a $\pi x \in]0, \pi[$. On sait que $\sin(\pi x) = \frac{x}{\pi} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-x) \dots (1-x)x(1+x) \dots (n+x)}{(n!)^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1-x)} = 1$, on obtient bien $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

10

En développant par la formule du binôme, on a $P_n(x) = x + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Ainsi, $P_n(x)$ est un polynôme de degré $2n+1$. Déterminons les racines complexes de P_n .

On a $P_n(x) = 0$ ssi $\left(\frac{1+ix/(2n+1)}{1-ix/(2n+1)} \right)^{2n+1} = 1$.

Or, $\frac{1+ix/n}{1-ix/n} = e^{i\theta}$ ssi $i \frac{x}{n} = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{i \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$ ssi $x = (2n+1) \tan \left(\frac{\pi k}{2n+1} \right)$.

Donc les $x_{k,n} = (2n+1) \tan \left(\frac{\pi k}{2n+1} \right)$, avec $-n \leq k \leq n$, sont des racines distinctes de P_n .

Par degré, ce sont les seules et elles sont simples.

De plus, elles sont deux à deux opposées, et 0 est racine. On obtient donc :

Donc $P_n(x) = \lambda_n x \prod_{k=1}^n (x - x_{k,n})(x + x_{k,n}) = \lambda_n x \prod_{k=1}^n (x^2 - x_{k,n}^2)$.

Le polynôme s'écrit aussi $P_n(x) = \mu_n x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{x_{k,n}^2} \right)$.

Comme le coefficient en x de P_n vaut 1, alors $\mu_n = 1$.

Donc $P_n(x) = x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{x_{k,n}^2}\right)$, c'est-à-dire $P_n(x) = x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)^2}\right)$.

11.a)

$$\left(1 + i\frac{t}{n}\right) = \sqrt{1 + \frac{t^2}{n^2}} \exp\left(i \arctan\left(\frac{t}{n}\right)\right).$$

$$\text{Donc } \left(1 + i\frac{t}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^n \exp\left(ni \arctan\left(\frac{t}{n}\right)\right).$$

$$\text{On a } \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^n = \left(1 + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \text{ qui tend vers 1 lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\text{Et } \exp\left(ni \arctan\left(\frac{t}{n}\right)\right) = \exp\left(ni \left(\frac{t}{n} \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \text{ qui tend vers } e^{it} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + i\frac{t}{n}\right)^n = e^{it}.$$

11.b)

$$\text{Par a), on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} + e^{-ix}) = \sin x.$$

12.a)

$$\text{On remarque tout d'abord que } \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tan \theta \geq \theta \quad (\text{car } \tan 0 = 0 \text{ et } \tan' \geq 1).$$

$$\text{Donc } (2n+1)^2 \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)^2 \geq (2n+1)^2 \left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)^2 \geq \pi^2 k^2.$$

$$\text{Supposons } |x| \leq \pi m.$$

$$\text{Pour } k \geq m, \text{ on a donc } 0 \leq \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)^2} \leq \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \leq 1.$$

Donc :

$$A_m(x) \leq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) \leq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)^2}\right) \leq 1.$$

$$\text{Or } P_n(x) = P_{n,m}(x) \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)^2}\right).$$

$$\text{Donc } P_n(x) \text{ est compris entre } P_{n,m}(x)A_m(x) \text{ et } P_{n,m}(x).$$

12.b)

$$\text{On a } \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)^2 \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)^2 = \pi^2 k^2.$$

$$\text{Comme produit fini de limites, on a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n,m}(x) = x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

12.c)

Posons $S(x) = Q_m(x)A_m(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_m(x) = 1$. Pour m assez grand, on a $|x| \leq \pi m$ et $1 - \varepsilon \leq A_m(x) \leq 1$.

On a $\begin{cases} S(x) \text{ compris entre } Q_m(x) \text{ et } Q_m(x)A_m(x) \\ P_n(x) \text{ compris entre } P_{n,m}(x) \text{ et } P_{n,m}(x)A_m(x) \end{cases}$

On a donc $|P_n(x) - P_{n,m}(x)| \leq \varepsilon |P_{n,m}(x)|$ et $|S(x) - Q_m(x)| \leq \varepsilon |Q_m(x)|$.

Or, $|P_n(x) - S(x)| \leq |P_n(x) - P_{n,m}(x)| + |P_{n,m}(x) - Q_m(x)| + |Q_m(x) - S(x)|$.

Donc $|P_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon |P_{n,m}(x)| + |P_{n,m}(x) - Q_m(x)| + \varepsilon |Q_m(x)|$.

Les familles $(P_{n,m}(x))_{(n,m) \in \mathbb{N}}$ et $Q_m(x)$ sont uniformément bornées par $T(x) = |x| \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$.

Donc $|S(x) - P_n(x)| \leq 2\varepsilon T(x) + |P_{n,m}(x) - Q_m(x)|$.

Pour n assez grand, on a donc : $|S(x) - P_n(x)| \leq (2T(x) + 1)\varepsilon$.

Comme ε peut être choisi arbitrairement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = S(x)$.