

Révision n°2. Développements eulériens

La partie IV est indépendante des précédentes. Durée : 2h30 pour parties I-II-III.

Partie I. Formule de la fonction Gamma

1.a) Soit $x > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$, où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1.b) Soit $x > 0$. Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$.

Partie II. Développement eulérien de la fonction cotan

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 - \frac{1}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

3.a) Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Remarque : La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ converge ssi les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{-n}$ convergent.

Ne pas confondre avec l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n u_k$ (qui est une propriété moins forte).

3.b) Montrer que S est périodique.

3.c) Montrer que $f : x \mapsto \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 - S(x)$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+\pi}{2}\right) = 4f(x)$$

4.a) Soit $a \geq \pi$. On pose $M_a = \sup_{[-a, a]} |f|$. Montrer que $M_a = 0$.

4.b) Que peut-on en déduire sur f ?

5. Dédurre des questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2}$$

6. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x - n\pi}$.

6.a) Montrer que pour tout réel x , il existe $\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_N(x)$.

6.b) Montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et que Φ est π -périodique.

7. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

Partie III. Formule des compléments

8. On considère $g :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

8.a) Montrer que g de classe C^1 sur $]0, \pi[$, et calculer $\frac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

8.b) Déterminer un équivalent de $g(x)$ en $x = 0$.

8.c) Montrer que

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

9. *Formule des compléments.* Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Partie IV. Développement eulérien de $\sin$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$P_n(x) = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + i \frac{x}{2n+1} \right)^{2n+1} - \left(1 - i \frac{x}{2n+1} \right)^{2n+1} \right)$$

10. Montrer que

$$P_n(x) = x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2 \left(\frac{\pi k}{2n+1} \right)} \right)$$

11.a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + i \frac{t}{n} \right)^n = \exp(it)$.

Indication : Utiliser l'écriture trigonométrique de $\left(1 + i \frac{t}{n} \right)$.

11.b) En déduire que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \sin x$.

12. (★) *Attention : question technique et peu instructive.*

Pour $0 \leq m \leq n$ entiers, on pose $P_{n,m}(x) = x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2 \left(\frac{\pi k}{2n+1} \right)} \right)$.

On pose aussi $Q_m(x) = x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$ et $A_m(x) = \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$.

12.a) Montrer que pour $|x| \leq \pi m$ et $n \geq m$, $P_n(x)$ est compris entre $P_{n,m}(x)A_m(x)$ et $P_{n,m}(x)$.

12.b) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n,m}(x) = Q_m(x)$.

12.c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$.

Epilogue. On obtient ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$