

Révision n°1. Processus de Galton-Watson. Corrigé

Partie I

I.1) On a $0 \leq f(0) \leq 1$, donc $u_0 \leq u_1$, et par récurrence immédiate, $u_{n+1} \leq u_n$, car f est croissante.

Majorée par 1, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc.

I.2) On a $L \in [0, 1]$, donc f est continue en L . Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $L = f(L)$ par passage à la limite.

Soit μ un point fixe de f . On a $u_0 \leq \mu$, et comme f est croissante et que $f(\mu) = \mu$, alors par récurrence $u_n \leq \mu$.

Par passage à la limite des inégalités larges, on obtient $L \leq \mu$. Donc L est bien le plus petit point fixe de f .

I.3) On a $f(1-h) = 1 - \mu h + o(\varepsilon)$, donc $g(1-h) \sim_0 (1-\mu)h$, d'où $g(x) < 0$ au voisinage de 1^- .

Or, $g(0) \geq 0$, donc par le TVI, g s'annule sur $[0, 1[$, et ainsi, $L < 1$.

I.4) a) Comme f'' est positive, alors f est convexe, donc f est au-dessus de sa tangente en 1.

Ainsi $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 1 + \mu(x-1) = x$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in [0, 1[$ tel que $f(y) = y$.

Comme f est convexe, f est située sous la corde sur $[y, 1]$, donc $\forall x \in [y, 1]$, $f(x) = x$.

Donc $f''(1) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) > x$.

b) On a $\varepsilon_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - f(u_n) = 1 - f(1 - \varepsilon_n)$. Posons $\varphi(h) = 1 - f(1 - h)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. Or, $\varphi(h) = h - \frac{f''(1)}{2}h^2 + o_1(h^2)$. Ainsi, $\varphi(h) \sim h$ et $h - \varphi(h) \sim \frac{f''(1)}{2}h^2$.

On a $\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varphi(\varepsilon_n)} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{\varepsilon_n - \varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n \varphi(\varepsilon_n)} \sim \frac{f''(1)\varepsilon_n^2}{2\varepsilon_n^2} = \frac{f''(1)}{2}$. D'où le résultat.

c) Par Cesàro, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) = \frac{f''(1)}{2}$, donc $1 - u_n = \varepsilon_n \sim \frac{2}{f''(1)n}$.

I.5) a) f est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 1, donc $f(x) \geq 1 + \mu(x-1)$.

Comme $\mu < 1$ et $x-1 < 0$ lorsque $x < 1$, on obtient $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) \geq 1 + \mu(x-1) > 1 + (x-1) = x$.

Donc $L = 1$.

b) Avec les notations de 4), on a $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{\varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$. Or, $\varphi(h) = 1 - f(1-h) = \mu h + O(h^2)$.

On a ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \mu < 1$, donc par le critère de d'Alembert, $\sum \varepsilon_n$ converge (absolument).

De plus, $\frac{\varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n \mu} = 1 + O(\varepsilon_n)$, et $\ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1} \mu^{-(n+1)}}{\varepsilon_n \mu^{-n}} \right) = O(\varepsilon_n)$. Donc $\sum \ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1} \mu^{-(n+1)}}{\varepsilon_n \mu^{-n}} \right)$.

c) Par b), la série $\sum (\ln(\varepsilon_{n+1} \mu^{-(n+1)}) - \ln(\varepsilon_n \mu^{-n}))$ converge, donc la suite $(\ln(\varepsilon_n \mu^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Posons $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\varepsilon_n \mu^{-n})$. Alors $1 - u_n = \varepsilon_n \sim c \mu^n$, où $c = e^\lambda > 0$.

Partie II

II.1) On a $P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j) = P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j)$.

Or, Y_n est une fonction des $X_{m,i}$ avec $m < n$.

Comme les $X_{n,i}$ sont indépendants des $X_{m,i}$, alors $P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j) = P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k)$.

Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k) t^k = G_{\sum_{i=1}^j X_{n,i}}(t) = G_X(t)^j = f(t)^j$.

Donc $E(t^{Y_{n+1}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j) P(Y_n = j) t^k$.

$$\text{Donc } E(t^{Y_{n+1}}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(P(Y_n = j) \sum_{k=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k) t^k \right).$$

II.2) Comme X est d'espérance finie, alors f est dérivable en 1.

On en déduit que Y_n est d'espérance finie et que $E(Y_n) = \varphi'_n(1) = \mu^n \varphi'_0(1) = \mu^n$.

La probabilité d'extinction est $\alpha = P(A)$, où $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} P(Y_n = 0)$.

Donc $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, où $u_n = \varphi_n(0)$, c'est-à-dire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = f(0)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a bien $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^2 car X est de moment d'ordre 2 fini.

D'autre part, $f''(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X=k) \geq P(X \geq 2) > 0$.

b) On a par Markov, $P(Y_n \geq 1) \leq \frac{E(Y_n)}{1} = \mu^n$.

Donc on peut considérer T_n à valeurs entières.

II.5) On a $P(T > n) = P(Y_n \geq 1) = 1 - u_n \sim \frac{2}{nf''(1)}$.

II.6) a) On a $Z(\omega) < +\infty$ ssi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p, n_{\in \mathbb{N}}(Y_n(\omega) = 0)$.

On a ainsi $(Z < +\infty) = \cup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n = 0)$.

b) La suite $(Z_n \geq k)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Comme $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1)$, alors $P(Z = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = k)$.

$$\text{Donc } |G_{Z_n}(t) - G_Z(t)| \leq \sum_{k=0}^N |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + R_N,$$

d) Soit $t \in [0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} t^N = 0$, il existe N tel que $\frac{t^N}{1-t} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par b), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N |P(Z_n = k) - P(Z = k)| = 0$ (somme finie de termes convergeant vers 0).

Donc pour n assez grand, $\sum_{k=0}^N |P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $|G_{Z_n}(t) - G_Z(t)| \leq \varepsilon$.

On en déduit que pour tout $t \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{Z_n}(t) = G_Z(t)$.

e) Par d), $\forall t \in [0, 1[$, $G_Z(t) = tf(G_Z(t))$.

Pour $t < 1$, on a donc $G'_Z(t) = f(G_Z(t)) + tG'_Z(t)f'(G_Z(t))$, d'où $G'_Z(t) = \frac{f(G_Z(t))}{1 - tf'(G_Z(t))}$.

On a donc $\lim_{t \rightarrow 1} G'_Z(t) = \frac{1}{1-\mu}$ si $\mu < 1$, et $\lim_{t \rightarrow 1} G'_Z(t) = +\infty$ si $\mu = 1$.

Par le th du prolongement C^1 , G_Z est dérivable en 1 ssi $\mu < 1$, et on a $G'_Z(1) = \frac{1}{1-\mu}$.

Donc Z est d'espérance finie, et $E(Z) = \frac{1}{1-\mu}$.

Remarque : Lorsque $\mu > 1$, $P(Z = +\infty) > 0$, donc a fortiori, Z n'est pas d'espérance finie.

f) Pour prouver la relation $G_{Z_{n+1}}(t) = tf(G_{Z_n}(t))$, on utilise $Z_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{Z_n} \hat{X}_i$, où les $\hat{X}_i$ sont indépendants et de même loi que X . Le facteur t vient du terme initiale $Y_0 = 1$.

II.7) a) Premier cas : $P(X = 0) > 0$.

Lorsque $Y_1 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 0) = 1$, et donc $P((Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (0)_{n \in \mathbb{N}^*}) = 1$.

En effet, une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Donc $\gamma \geq P(Y_1 = 0) = P(X = 0) > 0$.

Second cas : $P(X = 0) = 0$. Alors presque sûrement $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Donc $\gamma \geq P(Y_1 = 2) = P(X = 2) > 0$.

b) On a $Y_0 = 1$. La probabilité qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Y_n = 1$ vaut donc $1 - \gamma < 1$.

Plus généralement, si $Y_m = 1$, la probabilité qu'il existe $n > m$ tel que $Y_n = 1$ vaut aussi $1 - \gamma$.

Donc la probabilité que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur 1 au moins r fois vaut $(1 - \gamma)^r$.

Par continuité décroissante, la probabilité que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur 1 une infinité de fois est égale à la limite de $(1 - \gamma)^r$ lorsque r tend vers $+\infty$, donc vaut 0. Il en est de même pour $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Notons Δ l'événement : " il y a extinction ", c'est-à-dire : $\omega \in \Delta$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}$, $Y_n(\omega) = 0$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons A_k l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels $Y_n(\omega) \neq k$ pour n assez grand.

Par b), $P(A_k) = 0$, donc on a aussi $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = 0$.

Or, $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ ssi pour tout n assez grand, on a $Y_n(\omega) = 0$ ou $Y_n(\omega) > k$.

Ainsi, presque sûrement, on a : $Y_n > k$ pour n assez grand ou il y a extinction.

Donc presque sûrement, s'il n'y a pas extinction, on a $Y_n(\omega) > k$ pour n assez grand

Or, $(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = +\infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (Y_n > k \text{ pour } n \text{ assez grand})$.

Par continuité décroissante, on a donc $P(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = +\infty \mid \bar{\Delta}) = 1$.

Comme $(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = +\infty)$ et Δ sont disjoints, on obtient bien $P(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = +\infty) + P(\Delta) = 1$.