

Partie I

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^2 telle que les dérivées f' et f'' soient à valeurs positives.

On suppose de plus $f(1) = 1$ et $f''(1) > 0$. On pose $\mu = f'(1)$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

I.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente. On pose désormais $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

I.2) Montrer que L est le plus petit point fixe de f .

I.3) On suppose $\mu > 1$. Montrer que $f(x) < x$ au voisinage de 1^- et en déduire $L < 1$.

I.4) On suppose $\mu < 1$ et on pose $\varepsilon_n = 1 - u_n$. On a donc $\varepsilon_{n+1} = 1 - f(1 - \varepsilon_n)$.

a) Montrer que $\forall x \in [0, 1[, f(x) > x$. On en déduit que L vaut 1.

b) On vérifie aisément (*admis ici*) que $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n \neq 0$. Montrer que la série $\sum \varepsilon_n$ converge.

c) Montrer que $\frac{\varepsilon_{n+1}\mu^{-(n+1)}}{\varepsilon_n\mu^{-n}} = 1 + O(\varepsilon_n)$ et en déduire que la série $\sum \ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1}\mu^{-(n+1)}}{\varepsilon_n\mu^{-n}} \right)$ converge.

d) Montrer qu'il existe une constante c telle que $\varepsilon_n \sim c\mu^n$.

I.5) On suppose $\mu = 1$.

a) Montrer que $\forall x \in [0, 1[, f(x) > x$. On en déduit que L vaut 1.

b) On vérifie aisément (*admis ici*) que $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n \neq 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$.

c) En déduire $(1 - u_n) \sim \frac{2}{f''(1)n}$. On pourra utiliser le lemme de Cesàro supposé connu.

Partie II

On considère un espace probabilisé (Ω, P) .

On considère une famille $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ de variables. entières indépendantes et de même loi que X .

On suppose que X est de moment d'ordre 2 fini et que $P(X \geq 2) > 0$. On pose $\mu = E(X)$.

On considère $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $Y_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \begin{cases} Y_{n+1}(\omega) = 0 \text{ si } Y_n(\omega) = 0 \\ Y_{n+1}(\omega) = \sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, Y_n représente le nombre d'individus à la génération n .

S'il n'y a pas d'individu à la génération n , il n'y en a pas plus à la génération suivante.

On dit qu'il y a extinction lorsque presque sûrement il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $Y_n = 0$.

Autrement dit, il y a extinction ssi l'événement $\{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}, Y_n(\omega) = 0\}$ est presque sûr.

On note $f(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$ la série génératrice de X (et donc des variables $X_{n,i}$), où $p_k = P(X = k)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la série génératrice de la variable aléatoire Y_n .

On a donc pour $t \in [0, 1]$, $\varphi_n(t) = E(t^{Y_n})$, et en particulier, pour $t \in [0, 1]$, $\varphi_0(t) = t$.

II.1) a) Montrer que pour tous entiers n et $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall t \in [0, 1] , \quad \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y_{n+1} = k \mid Y_n = j) t^k = f(t)^j$$

Indication : Utiliser $G_S(t)$, où $S = \sum_{i=1}^j X_{n,i}$.

b) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1] , \quad \varphi_{n+1}(t) = \varphi_n(f(t))$.

II.2) Montrer que Y_n est d'espérance finie et que $E(Y_n) = \mu^n$.

II.3) On note α la probabilité d'extinction.

Montrer que $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

II.4) a) En utilisant la partie I, montrer que $\alpha = 1$ si et seulement si $\mu \leq 1$.

b) On suppose $\mu < 1$. On définit $T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n(\omega) = 0\} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N}, Y_n(\omega) = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que $P(Y_n \geq 1) \leq \mu^n$. Que peut-on en déduire pour $P(T > n)$ et $P(T = +\infty)$?

c) En déduire une majoration de $E(T)$ dans le cas où $\mu < 1$.

II.5) On suppose $\mu = 1$. Montrer que $P(T = +\infty) = 0$ et $E(T) = +\infty$.

II.6) *Étude de la lignée.* On suppose $\mu \leq 1$, et on pose

$$Z_n = \sum_{i=0}^n Y_i \quad \text{et} \quad Z = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n$$

On admet que Z est une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

a) Montrer que $P(Z < +\infty) = 1$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(P(Z_n \geq k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P(Z \geq k)$.

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(P(Z_n = k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c) Soit $t \in [0, 1[$. Montrer que pour tous entiers naturels n et N , on a

$$|G_{Z_n}(t) - G_Z(t)| \leq \sum_{k=0}^N |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \frac{t^N}{1-t}$$

d) En déduire que $(G_{Z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers G_Z sur $[0, 1[$.

e) On *admet* que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1] , \quad G_{Z_n}(t) = t f(G_{Z_n}(t))$.

Montrer que Z est d'espérance finie ssi $\mu < 1$, et calculer $E(Z)$ dans ce cas.

f) *Question supplémentaire* : Donner une idée de la preuve de la formule admise au e).

II.7) a) Montrer que la probabilité γ que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur 1 est non nulle.

b) Montrer que la probabilité que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prenne la valeur 1 une infinité de fois est nulle.

c) On montre de façon analogue (*admis ici*) que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

On note α la probabilité d'extinction et β la probabilité que $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = +\infty$. Montrer que $\alpha + \beta = 1$.