

A. Suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues

1) Théorème de convergence dominée

Si $f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$, avec f_n et f continues (par morceaux) sur I et si $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$, avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable (domination uniforme par rapport à n assez grand), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$.

Exemple : $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}} du \sim \frac{\pi^2}{12n}$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}} du = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \Gamma(\alpha)$. *Remarque :* Se ramener à $I = [0, +\infty[$.

2) Convergence uniforme

a) *Continuité :* Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et les f_n continues, alors f est continue.

Remarque : Généralisation avec le théorème d'interversion des limites.

b) *Intégration :* Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.

c) *Dérivation* d'une limite d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de classe C^1 .

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f et si $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g , alors f est C^1 et $f' = g$.

De plus, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment.

Important : Pour a) et c), il suffit que les convergences soient uniformes sur tout segment.

B. Séries $\sum f_n$ de fonctions continues

1) Limite et continuité

a) - Th de la double limite :

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ et s'il existe $\lambda_n = \lim_b f_n$, alors $\lim_b (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$.

- Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv uniformément (sur tout segment de I) et si les f_n continues, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

b) Toute série normalement convergente sur I converge uniformément sur I .

Exemple de convergence uniforme sans cv normale : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

c) *Exemple :* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{xn^2 + n}$ converge normalement sur tout $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

En posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{xn^2 + n}$, on a donc f continue sur $]0, +\infty[$.

En comparant $f(x)$ à $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{xt^2 + t} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+xt} \right) dt = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$, on obtient $f(x) \sim -\ln(x)$ en $x = 0^+$.

2) Dérivation terme à terme d'une série de fonctions $\sum f_n$ convergeant vers f

a) Les f_n sont C^1 , et $\sum f'_n$ converge uniformément sur (tout segment de) I . Alors f est C^1 et $f' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Remarque : De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

b) Les f_n sont C^∞ , et les $\sum f_n^{(p)}$ cv uniformément sur tout segment de I pour $p \geq 1$ (ou p assez grand).

Alors f est C^∞ et $f^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$.

Remarque : On utilise souvent la convergence normale (pour justifier la convergence uniforme).

Exemple : Séries entières : si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, cv normale des séries dérivées sur tout segment $[-\rho, \rho] \subset]-R, R[$.

c) Les f_n sont C^p , $\sum f_n^{(p)}$ cv uniformément sur tout segment de I , et les $\sum f_n^{(k)}$ cv pour $k < p$. Alors f est C^p .

3) Intégrale d'une série de fonctions

a) Si les f_n sont continues et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$.

Exemple : Si $\sum a_n$ converge absolument, alors $\phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{int}$ est continue et $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t) e^{-int} dt$.

b) **Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions** (continues par morceaux) :

Si $f = \sum f_n$ est continue (par morceaux) et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$ converge, alors $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Exemple : $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \left(1 - 2\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{12}$.

Important : On est souvent amené à utiliser la cv uniforme locale pour justifier la continuité de f .

c) *Remarque culturelle* : Théorème de cv monotone : supposons les f_n et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continues.

Si les f_n sont *positives*, on a toujours $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$: en particulier, l'un cv ssi l'autre cv.

En effet, si $\sum \int_I f_n$ cv, alors $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ par le théorème ITT.

Et si l'intégrale $\int_I f$ converge, on utilise le th de cv dominée appliqué aux sommes partielles :

$S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ donne le résultat, car $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I S_n$ avec la domination : $0 \leq S_n \leq f$.

C. Intégrales dépendant d'un paramètre

1) Théorème de convergence dominée pour un paramètre continu

a) On considère $\boxed{g(x) = \int_I f(x, t) dt}$ avec $x \rightarrow a$.

On suppose que $\forall t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = \lambda(t)$, et que les $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \lambda(t)$ sont continues par morceaux.

Hypothèse de domination : Il existe un voisinage V de a (dans A) tel que $\forall x \in V, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$, avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable.

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \int_I \lambda(t) dt$

Remarque : Vu le th de continuité, cette propriété ne sert généralement que dans le cas où $a = +\infty$.

b) **Continuité** de g : Pour prouver $g \in C^0$, on utilise la domination uniforme par rapport au paramètre $x \in A$ sur tout segment V de A : on a $\forall x \in V, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$, avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable.

On suppose aussi la continuité des $x \mapsto f(x, t)$, et la continuité par morceaux (et l'intégrabilité) des $t \mapsto f(x, t)$.

Exemple : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On a $\forall x \in [a, b] \subset]0, +\infty[, |t^{x-1} e^{-t}| \leq \varphi(t)$, avec $\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, t) \mapsto f(x, t)$ est continue, $g : x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$ est continue.

En effet, pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on a $\forall x \in [a, b], \forall t \in [0, 1], |f(x, t)| \leq \sup_{(x,t) \in [a,b] \times [0,1]} |f(x, t)| = \varphi(t)$ intégrable sur $[0, 1]$.

2) Dérivabilité

a) Pour prouver que g est C^1 :

- Pour tout t , les fonctions $x \mapsto f(x, t)$ sont de classe C^1

- Pour tout x , les fonctions $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont continues (par morceaux) et intégrables

- Domination : Pour tout $[a, b] \subset A$, il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall x \in [a, b], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$.

Exemple : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt$.

On a $\forall x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$ (domination de e^{-tx} par e^{-ta} sur $[a, +\infty[$, où $a > 0$ arbitraire).

b) Pour prouver $g \in C^p$, avec $p \geq 1$:

- Pour tout t , les fonctions $x \mapsto f(x, t)$ sont de classe C^p

- Pour tout x et $k \leq p$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ sont continues (par morceaux) et intégrables

- L'hypothèse de domination porte uniquement sur la dérivée $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$.