**Composition n°6. Corrigé**

**Premier problème**

**I.1)** On a $0 \leq f(0) \leq 1$, donc $u_0 \leq u_1$, et par récurrence immédiate, $u_{n+1} \leq u_n$, car $f$ est croissante.

Majorée par 1, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc.

**I.2)** On a $L \in [0,1]$, donc $f$ est continue en $L$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $L = f(L)$ par passage à la limite.

Soit $\mu$ un point fixe de $f$. On a $u_0 \leq \mu$, et comme $f$ est croissante et que $f(\mu) = \mu$, alors par récurrence $u_n \leq \mu$.

Par passage à la limite des inégalités larges, on obtient $L \leq \mu$. Donc $L$ est bien le plus petit point fixe de $f$.

**I.3)** On pose $g(x) = f(x) - x$. On a $f(1-h) = 1 - \mu h + \mathfrak{o}\,(\varepsilon)$

Donc $g(1-h) \sim_0 (1-\mu)h$, d'où $g(x) < 0$ au voisinage de $1^-$.

Or, $g(0) \geq 0$, donc par le TVI, $g$ s'annule sur $[0,1[$, et ainsi, $L < 1$.

**I.4)** a) Comme $f''$ est positive, $f$ est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 1, donc $f(x) \geq 1 + \mu(x-1)$.

Comme $\mu < 1$ et $x - 1 < 0$ lorsque $x < 1$, on obtient $\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geq 1 + \mu(x-1) > 1 + (x-1) = x$.

Donc $L = 1$.

b) On a $\varepsilon_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - f(u_n) = 1 - f(1-\varepsilon_n)$. Posons $\varphi(h) = 1 - f(1-h)$.

On a $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \dfrac{\varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$. Or, $\varphi(h) = 1 - f(1-h) = \mu h + O(h^2)$.

On a ainsi $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \mu < 1$, donc par le critère de d'Alembert, $\sum \varepsilon_n$ converge (absolument).

De plus, $\dfrac{\varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n \mu} = 1 + O(\varepsilon_n)$, et $\ln\left(\dfrac{\varepsilon_{n+1}\mu^{-(n+1)}}{\varepsilon_n \mu^{-n}}\right) = O(\varepsilon_n)$. Donc $\sum \ln\left(\dfrac{\varepsilon_{n+1}\mu^{-(n+1)}}{\varepsilon_n \mu^{-n}}\right)$ converge.

c) Par b), la série $\sum \left(\ln\left(\varepsilon_{n+1}\mu^{-(n+1)}\right) - \ln(\varepsilon_n \mu^{-n})\right)$ converge, donc la suite $(\ln(\varepsilon_n \mu^{-n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Posons $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \ln(\varepsilon_n \mu^{-n})$. Alors $1 - u_n = \varepsilon_n \sim c\mu^n$, où $c = e^\lambda > 0$.

**I.5)** a) $f$ est au-dessus de sa tangente en 1. Ainsi $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 1 + \mu(x-1) = x$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in [0,1[$ tel que $f(y) = y$.

Comme $f$ est convexe, $f$ est située sous la corde sur $[y,1]$, donc $\forall x \in [y,1],\ f(x) = x$.

Donc $f''(1) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $\forall x \in [0,1[,\ f(x) > x$.

b) Lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Or, $\varphi(h) = h - \dfrac{f''(1)}{2}h^2 + \mathfrak{o}_1(h^2)$. Ainsi, $\varphi(h) \sim h$ et $h - \varphi(h) \sim \dfrac{f''(1)}{2}h^2$.

On a $\dfrac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \dfrac{1}{\varepsilon_n} = \dfrac{1}{\varphi(\varepsilon_n)} - \dfrac{1}{\varepsilon_n} = \dfrac{\varepsilon_n - \varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n \varphi(\varepsilon_n)} \sim \dfrac{f''(1)\varepsilon_n^2}{2\varepsilon_n^2} = \dfrac{f''(1)}{2}$. D'où le résultat.

c) Par Cesàro, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_n} - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\right) = \dfrac{f''(1)}{2}$, donc $1 - u_n = \varepsilon_n \sim \dfrac{2}{f''(1)n}$.

**II.1)** On a $P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j) = P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j)$.

Or, $Y_n$ est une fonction des $X_{m,i}$ avec $m < n$.

Comme les $X_{n,i}$ sont indépendants des $X_{m,i}$, alors $P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j) = P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k)$.

Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k \mid Y_n = j)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^j X_{n,i} = k)t^k = G_{\Sigma_{i=1}^j X_{n,i}}(t) = G_X(t)^j = f(t)^j$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a $E(t^{Y_{n+1}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(Y_{n+1} = k)$.

Par la formule des probas totales, $P(Y_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^{j} X_{n,i} = k \mid Y_n = j)$.

Donc $E(t^{Y_{n+1}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^{j} X_{n,i} = k \mid Y_n = j) P(Y_n = j) t^k$.

On peut appliquer Fubini car les séries sont à termes positifs et convergentes.

Donc $E(t^{Y_{n+1}}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left( P(Y_n = j) \sum_{k=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^{j} X_{n,i} = k) t^k \right)$.

Par a), on en déduit $E(t^{Y_{n+1}}) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(Y_n = j) f(t)^j = \varphi_n(f(t))$.

**II.2)** Comme $X$ est d'espérance finie, alors $f$ est dériable en 1.

Par récurrence, $\varphi_n$ est dérivable en 1, et $\varphi'_{n+1}(1) = \mu \varphi'_n(1)$, car $f(1) = 1$ et $\mu = f'(1)$.

On en déduit que $Y_n$ est d'espérance finie et que $E(Y_n) = \varphi'_n(1) = \mu^n \varphi'_0(1) = \mu^n$.

**II.3)** On a $P(Y_n = 0) = \varphi_n(0)$.

La probabilité d'extinction est $\alpha = P(A)$, où $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} P(Y_n = 0)$.

Comme la suite d'événements $((Y_n = 0))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Donc $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n$, où $u_n = \varphi_n(0)$, c'est-à-dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = f(0)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

**II.4)** a) Il s'agit d'appliquer la partie I. On vérifie que $f : t \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k$ satisfait les hypothèses :

On a bien $f : [0, 1] \to [0, 1]$ de classe $C^2$ car $X$ est de moment d'ordre 2 fini.

On a immédiatement $f(1) = 1,$, et $f'$ et $f''$ sont positives (séries entières à termes positifs).

D'autre part,$f''(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X = k) \geq P(X \geq 2) > 0$.

On a enfin $\mu = f'(1) = E(X)$.

b) On a par Markov, $P(Y_n \geq 1) \leq \dfrac{E(Y_n)}{1} = \mu^n$.

D'autre part, $(T > n) = (Y_n \geq 1)$. Par continuité décroissante, $P(T = +\infty) = \lim_{n\to+\infty} P((Y_n \geq 1) = 0$.

Donc on peut considérer $T_n$ à valeurs entières.

c) Par b), la série $\sum P(T > n)$ converge, donc $Y_n$ est d'espérance finie, et $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) \leq \dfrac{1}{1-\mu}$.

**II.5)** On a $P(T > n) = P(Y_n \geq 1) = 1 - u_n \sim \dfrac{2}{nf''(1)}$.

On a donc encore $P(T = +\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n \geq 1) = 0$, mais ici $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) = +\infty$.

**II.6)** a) On a $Z(\omega) < +\infty$ ssi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, ${}_{n\in\mathbb{N}}(Y_n(\omega) = 0)$.

Comme $((Y_n = 0))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $Z(\omega) < +\infty$ ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Y_n(\omega) = 0$.

On a ainsi $(Z < +\infty) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(Y_n = 0)$.

Par continuité croissante, on obtient donc $P(Z < +\infty) = \lim_{n\to+\infty}(Y_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

b) La suite $(Z_n \geq k)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, $(Z \geq k) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(Z_n \geq k)$, donc par continuité croissante, $P(Z \geq k) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n \geq k)$.

Comme $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1)$, alors $P(Z = k) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = k)$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $|G_{Z_n}(t) - G_Z(t)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_n = k) - P(Z = k)\right| t^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| t^k$.

Donc $|G_{Z_n}(t) - G_Z(t)| \leq \sum_{k=0}^{N} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + R_N$, avec $R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} |P(Z_n = k) - P(Z = k)|\, t^k \leq \dfrac{t^{N+1}}{1-t} \leq \dfrac{t^N}{1-t}$, car $|P(A) - P(B)| \leq 1$ (écart dans $[0,1]$).

d) Soit $t \in [0,1[$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{N\to+\infty} t^N = 0$, il existe $N$ tel que $\dfrac{t^N}{1-t} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Par b), $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| = 0$ (somme finie de termes convergeant vers 0).

Donc pour $n$ assez grand, $\sum_{k=0}^{N} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où $|G_{Z_n}(t) - G_Z(t)| \leq \varepsilon$.

On en déduit que pour tout $t \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} G_{Z_n}(t) = G_Z(t)$.

e) Par d), $\forall t \in [0,1[$, $G_Z(t) = tf(G_Z(t))$.

Pour $t < 1$, on a donc $G'_Z(t) = f(G_Z(t)) + tG'_Z(t)f'(G_Z(t))$, d'où $G'_Z(t) = \dfrac{f(G_Z(t))}{1 - tf'(G_Z(t))}$.

On a donc $\lim_{t\to1} G'_Z(t) = \dfrac{1}{1-\mu}$ si $\mu < 1$, et $\lim_{t\to1} G'_Z(t) = +\infty$ si $\mu = 1$.

Par le th du prolongement $C^1$, $G_Z$ est dérivable en 1 ssi $\mu < 1$, et on a $G'_Z(1) = \dfrac{1}{1-\mu}$.

Donc $Z$ est d'espérance finie, et $E(Z) = \dfrac{1}{1-\mu}$.

*Remarque* : Lorsque $\mu > 1$, $P(Z = +\infty) > 0$, donc a fortiori, $Z$ n'est pas d'espérance finie.

f) Pour prouver la relation $G_{Z_{n+1}}(t) = tf(G_{Z_n}(t))$, on utilise $Z_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{Z_n} \widehat{X}_i$, où les $\widehat{X}_i$ sont indépendants et de même loi que $X$. Le facteur $t$ vient du terme initiale $Y_0 = 1$.

**II.7)** a) *Premier cas* : $P(X = 0) > 0$.

Lorsque $Y_1 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 0) = 1$, et donc $P((Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (0)_{n\in\mathbb{N}^*}) = 1$.

En effet, une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Donc $\gamma \geq P(Y_1 = 0) = P(X = 0) > 0$.

*Second cas* : $P(X = 0) = 0$. Alors presque sûrement $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Donc $\gamma \geq P(Y_1 = 2) = P(X = 2) > 0$.

b) On a $Y_0 = 1$. La probabilité qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Y_n = 1$ vaut donc $1 - \gamma < 1$.

Plus généralement, si $Y_m = 1$, la probabilité qu'il existe $n > m$ tel que $Y_n = 1$ vaut aussi $1 - \gamma$.

Donc la probabilité que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur 1 au moins $r$ fois vaut $(1-\gamma)^r$.

Par continuité décroissante, la probabilité que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur 1 une infinité de fois est égale à la limite de $(1-\gamma)^r$ lorsque $r$ tend vers $+\infty$, donc vaut 0. Il en est de même pour $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Notons $\Delta$ l'événement : “ il y a extinction ”, c'est-à-dire : $\omega \in \Delta$ ssi $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $Y_n(\omega) = 0$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons $A_k$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels $Y_n(\omega) \neq k$ pour $n$ assez grand.

Par b), $P(A_k) = 0$, donc on a aussi $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = 0$.

Or, $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ ssi pour tout $n$ assez grand, on a $Y_n(\omega) = 0$ ou $Y_n(\omega) > k$.

Ainsi, presque sûrement, on a : $Y_n > k$ pour $n$ assez grand ou il y a extinction.

Donc presque sûrement, s'il n'y a pas extinction, on a $Y_n(\omega) > k$ pour $n$ assez grand

Or, $(\lim_{n\to+\infty} Y_n = +\infty) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*/} (Y_n > k$ pour $n$ assez grand$)$.

Par continuité décroissante, on a donc $P(\lim_{n\to+\infty} Y_n = +\infty \mid \overline{\Delta}) = 1$.

Comme $(\lim_{n\to+\infty} Y_n = +\infty)$ et $\Delta$ sont disjoints, on obtient bien $P(\lim_{n\to+\infty} Y_n = +\infty) + P(\Delta) = 1$.

**Second problème**

**1)** Soit $z \in \Omega$. On a $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi(\theta) = \dfrac{g(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-in\theta} g(e^{i\theta})$.

On a : $\sup_{\theta \in [0,2\pi]} \left| z^n e^{-in\theta} g(e^{i\theta}) \right| \leq M \left| z \right|^n$, où $M = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \left| g(e^{i\theta}) \right|$.

$\varphi$ est continue car la série de fonctions $\theta \longmapsto z^n e^{-in\theta} g(e^{i\theta})$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

Par intégration terme à terme d'une série de fonctions, on obtient :

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\ d\theta = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} z^n e^{-in\theta} g(e^{i\theta})\ d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où $a_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} g(e^{i\theta})\ d\theta$.

Donc $f$ est bien DSE sur $\Omega$.

**2)** a) Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $f(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$.

La série de fonctions $\theta \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, car $\sum \left| a_k \right| r^k$ converge.

Par intégration terme à terme d'une série de fonctions, on obtient :

$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\ d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\ d\theta$. Or, $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\ d\theta = 0$ si $k - n \in \mathbb{Z}^*$ et $2\pi$ si $k = n$.

On peut donc conclure que $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\ d\theta$ vaut $2\pi r^n a_n$ si $n \in \mathbb{N}$, et 0 si $n \in \mathbb{Z}^-$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On va appliquer le th de convergence dominée à $g(r, \theta) = f(re^{i\theta})e^{-in\theta}$.

Par a), on a $\forall r \in [0, 1[$, $\int_0^{2\pi} g(r, \theta)\ d\theta = 2\pi r^n a_n$ si $n \in \mathbb{N}$, et 0 si $n \in \mathbb{Z}^-$.

Or, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $\lim_{r\to 1, r<1} g(r, \theta) = f(e^{i\theta})e^{-in\theta}$ par continuité de $f$.

De plus, on a la propriété de domination : $\forall r \in [0, 1[$, $g(r, \theta) \leq M = \varphi(\theta)$, où $M = \sup_D \left| f \right|$.

($f$ est continue sur le compact $D$, donc est bien bornée).

Donc, par cv dominée que $\lim_{r\to 1, r<1} \int_0^{2\pi} g(r, \theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\ d\theta$, ce qui permet de conclure.

**3)** (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons $f$ DSE sur $\Omega$ : Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Posons $\forall z \in \Omega$, $g(z) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\ d\theta$.

Par 1), on a $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, où $b_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta})\ d\theta$.

Par 2), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta})\ d\theta$. Donc $a_n = b_n$ et ainsi $f(z) = g(z)$, d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\ d\theta$.

Il résulte de 1) que $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où $a_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta})\ d\theta$.

**4)** a) Comme la convergence est uniforme, $f$ est continue sur $D$.

Par 3), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \Omega$, $f_n(z) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{f_n(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\ d\theta$.

Soit $z \in \Omega$. Posons $g_n(\theta) = \dfrac{f_n(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}$. On a $\lim_{n\to+\infty} g_n(\theta) = g(\theta)$, où $g(\theta) = \dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}$.

La convergence est uniforme sur $[0, 2\pi]$ car $\left| g_n(\theta) - g(\theta) \right| \leq \dfrac{\left| f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta}) \right|}{\left| 1 - ze^{-i\theta} \right|} \leq \dfrac{\sup_D \left| f_n - f \right|}{1 - \left| z \right|}$.

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on a donc $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\ d\theta$. Par 3), $f$ est DSE sur $\Omega$.

b) Soit $\rho > 0$. On pose $\forall z \in D$, $f_n(z) = g_n(\rho z)$ et $f(z) = g(\rho z)$. Ainsi, $f_n$ est bien continue sur $D$ et DSE sur $\Omega$.

Comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le disque de rayon $\rho$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $D$. On en déduit par a) que $f$ est DSE sur $\Omega$.

Ainsi, pour tout $\rho > 0$, $g$ est DSE sur tout disque ouvert de rayon $\rho$. Par unicité du DSE au voisinage de 0, les coefficients du DSE ne dépendent pas de $\rho$, donc $g$ est bien DSE sur $\mathbb{C}$.

**5)** a) $\omega(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{(n+2)!}$. Donc $\forall\,|z| \leq 1$, $|\omega(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+2)!} = \rho$.

b) Par produit de Cauchy, les $z \longmapsto \omega(z)^k$ sont DSE sur $\mathbb{C}$ comme produit de fonctions DSE sur $\mathbb{C}$.

c) Pour tout $z \in D$, $|z\omega(z)| \leq \rho < 1$, donc $\forall z \in D$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \omega(z)^n$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers $f$ sur $D$, car $\forall z \in D$, $\sup_{z\in D} \left|z^k \omega(z)^k\right| = \rho^k$ et $\rho < 1$.

Donc $f$ est continue sur $D$.

Par b), les $f_n$ sont DSE sur $\Omega$, dont il résulte de 4) que $f$ est DSE sur $\Omega$, c'est-à-dire $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n z^n$.

Par 1), on a $I_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, e^{-int}\, dt$.

Or, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{e^{it}} - 1 = 1 + e^{it} - e^{it}\omega(e^{it})$, donc $\dfrac{e^{it}}{e^{e^{it}} - 1} = \dfrac{1}{1 - e^{it}\omega(e^{it})} = f(e^{it})$.

**6)** a) On considère le produit de Cauchy de $f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\, y^n$ et de $e^{zy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n y^n}{n!}$.

Les rayons de convergence sont respectivement $> 1$ et $+\infty$, d'où le résultat, avec $\dfrac{B_n(z)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} I_{n-k} \dfrac{z^k}{k!}$.

La fonction $g : y \longmapsto f(y)e^{zy}$ est continue sur $D$ comme produit de fonctions continues.

Comme produits de fonctions DSE sur $\Omega$, $g$ est DSE sur $\Omega$. Donc
$\dfrac{B_n(z)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta = \dfrac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{e^{it}}{e^{e^{it}} - 1}\, e^{ze^{it}}\, dt$, car $\dfrac{e^{it}}{e^{e^{it}} - 1} = f(e^{it})$.

b) *Première méthode* (via b)) :

On a $B_n(z+1) - B_n(z) = \dfrac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{e^{ze^{it}}(e^{e^{it}} - 1)e^{it}}{e^{e^{it}} - 1}\, e^{-int}\, dt = \dfrac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ze^{it}} e^{it}\, e^{-int}\, dt$.

La fonction $y \longmapsto e^{zy}y = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!} y^n$ est DSE sur $\mathbb{C}$, donc $\dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ze^{it}} e^{it}\, e^{-int}\, dt = \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!}$.

On en déduit $B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ (et 0 si $n = 0$).

*Seconde méthode* (conseillée) : $\forall y \in \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{B_n(z+1) - B_n(z)}{n!} y^n = \dfrac{ye^{(z+1)y} - ye^{zy}}{e^y - 1} = ye^{yz} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!} y^n$.

Par unicité du DSE, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{B_n(z+1) - B_n(z)}{n!} = \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!}$, c'est-à-dire $B_n(z+1) - B_n(z) = \dfrac{z^{n-1}}{n}$.

**7)** Supposons que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ et que le convergence est uniforme sur tout disque $D(\rho)$.

Comme $P_n \in \mathcal{E}$ et que tout compact $K$ est inclus dans $D(\rho)$ pour un certain $\rho$ (assez grand), alors $f \in \mathcal{E}$ **.**

Réciproquement, supposons $f \in \mathcal{E}$. On a alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n z^n$. On fixe $\rho \in \mathbb{R}^+$.

On a $\forall z \in D(\rho)$, $|f(z) - P_n(z)| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_n|\, \rho^n$ reste d'une série convergente.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{|z|\leq\rho} |f(z) - P_n(z)| = 0$, et ainsi $f$ est limite uniforme de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur tout disque $D(\rho)$.

**8)** a) On a $\left| \int_0^{2\pi} \dfrac{e^{z\rho_n e^{it}} e^{it}}{e^{\rho_n e^{it}} - 1}\, e^{-int}\, dt \right| \geq \int_0^{2\pi} \dfrac{e^{|z|\rho_n}}{m}\, dt = \dfrac{2\pi}{m} e^{|z|\rho_n} = \dfrac{2\pi}{m} e^{|z|(2n+1)\pi}$.

Avec $b = 3\pi$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|z|\,(2n+1)\pi \leq nb\,|z|$.

D'autre part, $\dfrac{n!}{2\pi\rho_n^{n-1}} \leq \dfrac{n!}{2\pi(2n\pi)^{n-1}} \leq \dfrac{n}{(2\pi)^n} \to 0$, donc $\left(\dfrac{n!}{2\pi\rho_n^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par un réel $K$.

Avec $a = \dfrac{2\pi K}{m}$, on obtient bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|A_n(z)| \leq a e^{nb|z|}$.

b) On prend $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{b_{n.-1}A_n(z)}{n}$.

Posons $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{b_{k-1}A_k(z)}{k}$. On a $\sup_{|z|\leq\rho} |R_n(z)| \leq a \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{|b_{k-1}|}{k}\, r^k$, où $r = e^{b\rho}$.

Comme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{|b_{k-1}|}{k}\, r^k < +\infty$ (car $g \in \mathcal{E}$), alors $\lim_{n\to+\infty} \sup_{|z|\leq\rho} |R_n(z)| = 0$.

Donc $f$ est limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions polynômes. Donc $f \in \mathcal{E}$.

De plus, $f(z+1) - f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{b_{n.-1}}{n} (A_n(z+1) - A_n(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{b_{n.-1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = g(z)$.

*Remarque* : Si on pouvait prouver la convergence, on aurait pris plus haut $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{b_{n.-1}A_n(z)}{n}$.

c) (i) On a $\inf\{|e^z - 1|,\ z \in \Delta\} = 0$, donc il existe une suite $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\Delta$ telle que $\lim_{j\to+\infty} |e^{z_j} - 1| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{j\to+\infty} e^{z_j} = 1$. On pose $|z_j| = (2n_j + 1)$.

(ii) On a donc $\lim_{j\to+\infty} e^{\mathrm{Re}\, z_j} = 1$, donc $\lim_{j\to+\infty} \mathrm{Re}\, z_j = 0$ (en composant par ln puisqu'il s'agit ici de réels).

Comme $|z_j| = (2n_j + 1)\pi$, alors il existe des $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ tels que $z_j = i\varepsilon_j(2n_j + 1)\pi + \mathfrak{o}(1)$.

(iii) On a $\exp(i\varepsilon_j(2n_j + 1)\pi) = \exp(i\varepsilon_j\pi) = \exp(\pm i\pi) = -1$.

Donc $\lim_{j\to+\infty} e^{z_j} = -1$, ce qui contredit l'hypothèse $\lim_{j\to+\infty} e^{z_j} = 1$.