Composition n°6. *Durée 4h00*

Premier problème. Processus de Galton-Watson

Partie I

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^2 telle que les dérivées f' et f'' soient à valeurs positives.

On suppose de plus $f(1) = 1$ et $f''(1) > 0$. On pose $\boxed{\mu = f'(1)}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

I.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente.

On pose $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

I.2) Montrer que L est le plus petit point fixe de f.

I.3) On suppose $\boxed{\mu > 1}$. Montrer que $f(x) < x$ au voisinage de 1^- et en déduire $L < 1$.

I.4) On suppose $\boxed{\mu < 1}$ et on pose $\boxed{\varepsilon_n = 1 - u_n}$. On a donc $\varepsilon_{n+1} = 1 - f(1 - \varepsilon_n)$.

a) Montrer que $\forall x \in [0,1[$, $f(x) > x$. On en déduit que L vaut 1.

b) On vérifie aisément (*admis ici*) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \neq 0$. Montrer que la série $\sum \varepsilon_n$ converge.

c) Montrer que $\dfrac{\varepsilon_{n+1}\mu^{-(n+1)}}{\varepsilon_n \mu^{-n}} = 1 + O(\varepsilon_n)$ et en déduire que la série $\sum \ln\left(\dfrac{\varepsilon_{n+1}\mu^{-(n+1)}}{\varepsilon_n \mu^{-n}}\right)$ converge.

d) Montrer qu'il existe une constante c telle que $\varepsilon_n \sim c\mu^n$.

I.5) On suppose $\boxed{\mu = 1}$.

a) Montrer que $\forall x \in [0,1[$, $f(x) > x$. On en déduit que L vaut 1.

b) On vérifie aisément (*admis ici*) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \neq 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \dfrac{1}{\varepsilon_n}\right) = \dfrac{f''(1)}{2}$.

c) En déduire $(1 - u_n) \sim \dfrac{2}{f''(1)n}$. On pourra utiliser le lemme de Cesàro supposé connu.

Partie II

On considère un espace probabilisé (Ω, P).

On considère une famille $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ de variables. entières indépendantes et de même loi que X.

On suppose que X est de moment d'ordre 2 fini et que $\boxed{P(X \geq 2) > 0}$. On pose $\boxed{\mu = E(X)}$.

On considère $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Y_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad \forall \omega \in \Omega\ , \quad \begin{cases} Y_{n+1}(\omega) = 0 \text{ si } Y_n(\omega) = 0 \\ Y_{n+1}(\omega) = \sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, Y_n représente le nombre d'individus à la génération n.

S'il n'y a pas d'individu à la génération n, il n'y en a pas plus à la génération suivante.

On dit qu'il y a extinction lorsque presque sûrement il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $Y_n = 0$.

Autrement dit, il y a extinction ssi l'événement $\{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N},\ Y_n(\omega) = 0\}$ est presque sûr.

On note $f(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$ la série génératrice de X (et donc des variables $X_{n,i}$), où $p_k = P(X = k)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la série génératrice de la variable aléatoire Y_n.

On a donc pour $t \in [0,1]$, $\varphi_n(t) = E(t^{Y_n})$, et en particulier, pour $t \in [0,1]$, $\varphi_0(t) = t$.

II.1) a) Montrer que pour tous entiers n et $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall t \in [0,1] \ , \quad \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y_{n+1} = k \mid Y_n = j) t^k = f(t)^j$$

Indication : Utiliser $G_S(t)$, où $S = \Sigma_{i=1}^{j} X_{n,i}$.

b) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $\quad \varphi_{n+1}(t) = \varphi_n(f(t))$.

II.2) Montrer que Y_n est d'espérance finie et que $E(Y_n) = \mu^n$.

II.3) On note α la probabilité d'extinction.

Montrer que $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

II.4) a) En utilisant la partie I, montrer que $\alpha = 1$ si et seulement si $\mu \leq 1$.

b) On suppose $\mu < 1$. On définit $T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n(\omega) = 0\} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N}, \ Y_n(\omega) = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que $P(Y_n \geq 1) \leq \mu^n$. Que peut-on en déduire pour $P(T > n)$ et $P(T = +\infty)$?

c) En déduire une majoration de $E(T)$ dans le cas où $\mu < 1$.

II.5) On suppose $\mu = 1$. Montrer que $P(T = +\infty) = 0$ et $E(T) = +\infty$.

II.6) *Étude de la lignée.* On suppose $\mu \leq 1$, et on pose

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i \quad \text{et} \quad Z = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n$$

On admet que Z est une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

a) Montrer que $P(Z < +\infty) = 1$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(P(Z_n \geq k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P(Z \geq k)$.

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(P(Z_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Soit $t \in [0,1[$. Montrer que pour tous entiers naturels n et N, on a

$$|G_{Z_n}(t) - G_Z(t)| \leq \sum_{k=0}^{N} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \frac{t^N}{1-t}$$

d) En déduire que $(G_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers G_Z sur $[0,1[$.

e) On *admet* que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [0,1] \ , \quad G_{Z_n}(t) = t \, f\left(G_{Z_n}(t)\right)$$

Montrer que Z est d'espérance finie ssi $\mu < 1$, et calculer $E(Z)$ dans ce cas.

f) *Question supplémentaire* : Donner une idée de la preuve de la formule admise au e).

II.7) a) Montrer que la probabilité γ que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur 1 est non nulle.

b) Montrer que la probabilité que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prenne la valeur 1 une infinité de fois est nulle.

c) On montre de façon analogue (*admis ici*) que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

On note α la probabilité d'extinction et β la probabilité que $\lim_{n\to+\infty} Y_n = +\infty$. Montrer que $\alpha + \beta = 1$.

Second problème : Équation de Guichard (Claude, 1861-1924)

Partie I. Caractérisation des fonctions développables en série entière sur le disque unité

On note D le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, U le cercle unité et Ω le disque unité ouvert, c'est-à-dire

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad \text{et} \quad U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est DSE sur Ω ssi il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in \Omega,\ \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1) Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur U. Pour tout $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\, d\theta$$

Montrer que f est DSE sur Ω.

2) Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur D et DSE sur Ω.

Ainsi, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in \Omega,\ \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

a) Soit $r \in [0, 1[$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2\pi r^n a_n \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ si } n \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$$

b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2\pi a_n \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ si } n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

3) Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur D. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est DSE sur Ω

(ii) $\forall z \in \Omega,\ f(z) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\, d\theta.$

4) a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur D et DSE sur Ω.

On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction $f : D \to \mathbb{C}$.

Montrer que f est DSE sur Ω.

b) On dit qu'une fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est DSE sur $\mathbb{C}$ ssi il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions DSE sur $\mathbb{C}$.

On suppose que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

On suppose que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Déduire de a) que g est DSE sur $\mathbb{C}$. *Indication* : On pourra considèrer $z \longmapsto g_n(\rho z)$, où $\rho > 0$.

Partie II. Polynômes de Bernoulli

On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions DSE sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On utilisera les propriétés prouvées dans la partie I, ainsi que la propriété admise : *toute fonction qui est limite uniforme de fonctions continues sur une partie A de $\mathbb{C}$ est continue sur A.*

5) a) Montrer qu'il existe une fonction $\omega \in \mathcal{E}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1 + z - z^2\omega(z)$ et que

$$\forall\, |z| \leq 1,\ |\omega(z)| \leq \rho, \text{ où } \rho = e - 2$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} z^k \omega(z)^k$ appartient à $\mathcal{E}$.

c) Montrer que la fonction $f : D \to \mathbb{C} \quad z \longmapsto \dfrac{1}{1 - z\omega(z)}$ est continue sur D et que

$$\forall z \in \Omega,\ \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\ z^n \quad , \text{ avec } \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{e^{it}} - 1}\ e^{-int}\ dt$$

6) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\forall y \in \Omega, \quad f(y)e^{zy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(z)}{n!} y^n \ \ , \ \text{ où } B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{I_{n-k}}{k!} z^k = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ze^{it}} e^{it}}{e^{e^{it}} - 1}\ e^{-int}\ dt$$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}$.

Partie III. Équation de Guichard

L'objectif de cette partie est la résolution de l'équation $\boxed{(\mathcal{G}) : f(z+1) - f(z) = g(z)}$ d'inconnue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dans l'espace des séries entières. On considère $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ une fonction DSE sur $\mathbb{C}$.

On prend $\rho_n = (2n+1)\,\pi$ et $A_n(z) = \dfrac{n!}{2\pi\rho_n^{n-1}} \int_0^{2\pi} \dfrac{e^{z\rho_n e^{it}} e^{it}}{e^{\rho_n e^{it}} - 1}\ e^{-int}\ dt.$

On vérifie (admis ici) comme en partie II que $A_n(z)$ est un polynôme en z et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n(z+1) - A_n(z) = nz^{n-1}$$

On utilisera dans la suite le résultat de la partie I : si f est limite simple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{E}$, et si la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$, alors f appartient à $\mathcal{E}$.

7) Montrer qu'une fonction f appartient à $\mathcal{E}$ ssi elle est limite d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes et si la convergence est uniforme sur tout disque $D(\rho)$ de centre 0 et de rayon ρ.

8) a) On admet qu'il existe unc constante $m > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{\rho_n e^{it}} - 1\right| \geq m$.

Montrer qu'il existe des constantes a et b telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|A_n(z)| \leq a \exp(nb\,|z|)$.

b) Montrer que l'équation $(\mathcal{G})$ admet une solution $f \in \mathcal{E}$.

c) On veut justifier la propriété admise au a). On pose $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ |z| = (2n+1)\pi\}$.

On va montrer l'existence d'un réel $m > 0$ tel que $\forall z \in \Delta$, $|e^z - 1| \geq m$.

Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas.

(i) Montrer qu'il existe une suite $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans Δ telle que $\lim_{j\to+\infty} e^{z_j} = 1$.

(ii) Montrer qu'il existe $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ telle que $\lim_{j\to+\infty}(z_j - i\varepsilon_j(2n_j+1)\pi) = 0$.

(iii) Conclure à une contradiction.

Composition n°6. Addendum

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0^+ et un réel $\lambda \in]0,1[$ tels que $u_{n+1} = \lambda u_n + O(u_n^2)$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge.

b) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \sim c\, \lambda^n$.

2) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

a) Montrer que $f'(x)$ a même signe que x au voisinage de 0.

b) Montrer que $\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $f(x) > 0$.

c) (*complément*) Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) \geq \mu\, x^2$.

3) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et N des variables aléatoires indépendantes entières, et $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

a) Montrer que $P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)\ P(N = n)$.

b) On suppose les X_i de même loi que X. Montrer que $\forall t \in [-1,1]$, $G_S(t) = G_N(G_X(t))$.

4) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. entières indépendantes et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

On suppose que la série $\sum P(X_n \geq 1)$ converge.

a) On considère les événements A_p : $(\forall n \geq p,\ X_n = 0)$. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} P(A_p) = 1$.

b) Montrer que $P(S < +\infty) = 1$.

5) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions lipschitziennes de même rapport K définies sur le cercle unité Γ.

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur Γ.

a) Montrer que pour tout $|z| < 1$, $\int_0^{2\pi} \dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}}\, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où $a_n = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{in\theta}\, d\theta$.

b) Montrer que pour tout $|z| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \dfrac{f_n(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}}\, d\theta$.

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \dfrac{f_n(1) - f_n(e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \dfrac{f(1) - f(e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}}\, d\theta$.

Indications

1) a) Critère de d'Alembert. b) On pose $v_n = \lambda^{-n} u_n$. La série $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ cv (car en $O(u_n)$).

2) a) Par Taylor-Young, $f'(x) \sim \lambda x$, avec $\lambda = f''(0)$.

b) f' est croissante, est < 0 en 0^- et est > 0 en 0^+. Donc $f'(x) < 0$ sur $[-1,0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0,1]$.

c) L'application $g : x \longmapsto f(x)/x^2$ se prolonge par continuité en 0 et est > 0 sur $[-1,1]$, donc $\inf_{[-1,1]} g > 0$.

3) a) $P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N = n) = P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)$ car N est indépendante de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) $G_S(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S = k)\ t^k$ en utilise a) et Fubini (il y a cv absolue car $\sum_{n=0}^{+\infty} P(S = k)\, |t|^k < 1$).

4) a) $P(\overline{A_p}) = P(\cup_{n\geq p}(X_n \geq 1)) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} P(X_n \geq 1) \to 0$ lorsque $p \to +\infty$.

b) S est fini ssi $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq p$, $X_n = 0$.

Donc $P(S < +\infty) = \cup_{p\in\mathbb{N}} A_p$. Par continuité croissante, $P(S < +\infty) = \lim_{p\to+\infty} P(A_p) = 1$.

5) a) On a $\dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(\theta)$, avec $g_n(\theta) = f(e^{i\theta}) e^{in\theta} z^n$. On a $\sup_{[0,2\pi]} |g_n| \leq \sup_\Gamma |f|\ \ |z|^n$.

On conclut par ITT pour une série normalement convergente sur un segment (inutile d'utiliser ITT général).

b) Par intégration d'une suite qui cv uniformément sur un segment : $\left| \dfrac{f_n(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}} - \dfrac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}} \right| \leq \dfrac{\sup |f_n - f|}{1 - |z|}$.

c) Par cv dominée : cv simple sur $]0,2\pi[$ et $\left| \dfrac{f_n(1) - f_n(e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq K = \varphi(\theta)$ et φ intégrable sur $]0,2\pi[$.