Composition n°5. Corrigé

Premier problème

Partie A

1) a) On a $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n t^n}{n}$ série entière en t de rayon $R = \dfrac{1}{|z|} > 1$.
Donc φ est C^∞, et on a $\varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = \dfrac{z}{1-tz}$.

Remarque : On peut aussi utiliser le th sur les séries de fonctions $\sum f_n(t)$, avec $f_n(t) = \dfrac{z^n t^n}{n}$.
$\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge normalement sur $[0,1]$, car $\sup_{[0,1]} |f_n'| = |z|^n$.

b) On a $\phi'(t) = ((1-tz)\varphi'(t) - z)\exp(\varphi(t)) = 0$, donc φ est constante sur l'intervalle $[0,1]$.

En particulier, on a $\varphi(1) = \varphi(0)$, c'est-à-dire $\exp(L(z)) = 1/(1-z)$.

2) a) On a $|L(z)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$ par le cours (cf DSE des fonctions usuelles).

b) On a $L(z^k) = O(|z|^k)$ et comme $\sum |z|^k$ converge, alors $\sum L(z^k)$ converge absolument.

3) Par 1) b), on a : $\left(\prod_{k=0}^{N} \dfrac{1}{1-z^k}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{N} L(z^k)\right)$.

Par passage à la limite et par continuité de exp, $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{N} \dfrac{1}{1-z^k}$ existe et vaut $\exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} L(z^k)\right)$.

4) a) Si $\sum_{k=1}^{N} kp_k = n$, on a $0 \leq p_k \leq \dfrac{n}{k} \leq n$. Donc a fortiori $a_N(n) \leq (n+1)^N$.

Ainsi, $a_N(n) = O(n^N)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_N(n)\, x^n$ admet un rayon de convergence $R \geq 1$.

b) Lorsque $(p_1, ..., p_N) \in E_N(n)$, on a nécessairement $p_N \leq \dfrac{n}{N}$, c'est-à-dire $p_N \leq \left\lfloor \dfrac{n}{N} \right\rfloor$.
Pour construire une suite $(p_1, ..., p_N) \in E_N(n)$, on choisit donc pour p_n un entier $q \leq \left\lfloor \dfrac{n}{N} \right\rfloor$, puis une famille $(p_1, ..., p_{N-1})$ telle que $\sum_{k=1}^{N-1} kp_k = n - qN$.

On en déduit une bijection entre $E_N(n)$ et l'union disjointe des $E_{N-1}(n-qN)$, où $0 \leq q \leq \left\lfloor \dfrac{n}{N} \right\rfloor$.

Donc $a_N(n) = \sum_{q=0}^{\lfloor n/N \rfloor} a_{N-1}(n-qN)$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\forall |x| < 1$, $f_N(x) = f_{N-1}(x)\, \dfrac{1}{1-x^N}$.

On a $\dfrac{1}{1-x^N} = \sum_{q=0}^{+\infty} x^{qN} = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n$, avec $c(n) = 1$ si N divise q, et $c(n) = 0$ sinon.

Les deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{N-1}(n)\, x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n$ ont un rayon de convergence ≥ 1.

Les deux séries convergent donc absolument (car $|x| < 1$). Par produit de Cauchy, on a

$$\forall |x| < 1, \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{N-1}(n)\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{N-1}(n-k)c(k)\right) x^n$$

Or, $\sum_{k=0}^{n} a_{N-1}(n-k)c(k) = \sum_{k \text{ multiple de } N} a_{N-1}(n-k) = \sum_{q=0}^{\lfloor n/N \rfloor} a_{N-1}(n-qN)$, donc $= a_N(n)$ par a).

On obtient ainsi $f_{N-1}(x)\, \dfrac{1}{1-x^N} = f_N(x)$.

De plus, $f_0(x) = 1$, car $a_0(n) = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0(n) = 1$.

Par récurrence immédiate sur $N \in \mathbb{N}$, on obtient donc bien $f_N(x) = \prod_{k=1}^N \dfrac{1}{1-x^k}$.

5) a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Comme $p_k \leq \dfrac{n}{k}$, alors $\forall k > n$, $p_k = 0$. Donc $\forall N > n$, $a_N(n) = a_n(n)$.

Ainsi la suite $(a_N(n))_{N\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang n. A fortiori, $\lim_{n\to+\infty} a_N(n) = a_n(n) = b(n)$.

La suite $(a_N(n))_{N\in\mathbb{N}}$ est aussi croissante, car $a_N(n) \geq a_{N-1}(n)$ (cf 4) a) par exemple).

b) Soit $M \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^M a_N(n)\ x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n)\ x^n = f_N(x)$. Or, $\lim_{N\to+\infty} a_N(n) = b(n)$.

Par passage à la limite $N \to +\infty$, on en déduit $\sum_{n=0}^M b(n)\ x^n \leq \lim_{n\to+\infty} f_N(x) = g(x)$.

En faisant tendre M vers $+\infty$, on en déduit que $\sum b(n)\ x^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n \leq g(x)$.

D'autre part, les suites $N \to a_N(n)$ sont croissantes, donc $a_N(n) \leq b(n)$.

On en déduit $f_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n)\ x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$.

Par passage à la limite des inégalités larges, on obtient $g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$.

On en conclut par double encadrement que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$.

Remarque : On pourrait aussi utiliser le th de cv dominée pour les séries, car $\lim_{n\to+\infty} a_N(n) = b(n)$

Sachant que $0 \leq a_N(n) \leq b(n)$, il faut de toute façon prouver d'abord la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$.

6) a) L'existence de l'intégrale va résulter de l'application du théorème ITT (cf énoncé du théorème).

On pose $f_n(t) = -\dfrac{e^{-nt}}{n}$ et $\forall t > 0$, $\phi(t) = \ln(1-e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nt}}{n}$.

- On a bien $\phi = \sum_{n=0}^{+\infty}$ continue sur $]0, +\infty[$.

- De plus, f_n est intégrable et $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt = \dfrac{1}{n^2}$.

- Ainsi, $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ dt$ converge.

Par le théorème ITT, ϕ est intégrable et $\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{6}$.

b) On fixe $0 < x < 1$. On effectue le changement de variable affine $u = -t \ln x$.

On obtient donc $J(x) = \dfrac{-1}{-\ln x} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-t})\ dt = \dfrac{-1}{\ln x}\dfrac{\pi^2}{6} \sim \dfrac{\pi^2}{6(1-x)}$ car $\ln x \sim (1-x)$.

7) a) L'application $t \longmapsto -\ln(1-x^{-t})$ est (positive et) décroissante sur $]0, +\infty[$.

Par comparaison entre sommes et intégrales, on a donc

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-x^k) \leq \int_0^{+\infty} -\ln(1-x^t)\ dt$$

En composant par la fonction croissante exp, on obtient bien $g(x) \leq \exp(J(x))$.

b) Soit $0 < x < 1$. Comme les b_n sont positifs, on a $b_n x^n \leq g(x)$, et donc $b_n \leq \dfrac{\exp(J(x))}{x^n}$.

On prend $x_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a donc $b_n \leq (x_n)^{-n} \exp(J(x_n))$.

On a $J(x_n) \sim \dfrac{\pi^2}{6}\sqrt{n}$, donc $J(x_n) \leq 2\sqrt{n}$ pour n assez grand (car $\dfrac{\pi^2}{6} < 2$).

De même $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}=\exp\left(-n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\leq \exp\left(2\sqrt{n}\right)$ pour n assez grand.

(en effet, on a $-\ln(1-\varepsilon)\sim\varepsilon$ en $\varepsilon=0$, donc $-\ln(1-\varepsilon)\leq 2\varepsilon$ pour ε assez petit).

On en déduit que $b_n\leq\exp\left(4\sqrt{n}\right)$ pour n assez grand.

Remarque culturelle :

$b(n)$ représente le nombre de façon de décomposer l'entier n sous la forme $n=\sum_{k=1}^{+\infty}k\ p_k$, où $p_k\in\mathbb{N}$.

On peut montrer qu'il existe des constantes α et β telles que $b(n)\sim\dfrac{\exp(\alpha\sqrt{n})}{\beta n}=\lambda_n$.

Dans le sujet Mines PC-PSI 2022, on montre que $b(n)=O_{+\infty}(\lambda_n)$, qui améliore 7) b).

Second problème

Partie A

1. On a $\operatorname{card}\mathcal{M}_n(\{-1,1\})=2^{(n^2)}$.

2. Soient X et $Y\in\Delta$. On a $X^TAY=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j$. On a $a_{ij}x_iy_j=\pm1$.

Donc $\left|X^TAY\right|\leq n^2$ et $X^TAY\equiv n^2\ [2]$, donc $n^2-1\notin S(A)$.

3. On a $X^TBY=(C^TX)^TA(DY)$. Lorsque Y décrit Δ, DY décrit Δ. De même pour C^TX. Donc $S(B)=S(A)$.

4. On a $X^TIY=x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+x_2y_2=(x_1+y_1)(x_2+y_2)$. Donc $S(I)=\{-4,0,4\}$.

On a $X^TJY=x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2-x_2y_2=(x_1+y_1)(x_2+y_2)-2y_1y_2$.

On en déduit $S(J)=\{-2,2\}$.

Pour $C=\operatorname{Diag}(1,\varepsilon)$ et $D=\operatorname{Diag}(1,\varepsilon')$ et $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$, on a $\pm CAD=\pm\begin{pmatrix}a&\varepsilon'c\\\varepsilon b&\varepsilon\varepsilon'd\end{pmatrix}$.

Lorsque $(\varepsilon,\varepsilon')$ décrit $\{-1,1\}$, $\pm CID$ décrit toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\{-1,1\})$ de déterminant 0.

Lorsque $(\varepsilon,\varepsilon')$ décrit $\{-1,1\}$, $\pm CJD$ décrit toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\{-1,1\})$ de déterminant ±2.

On en déduit que $S(A)=\{-2,2\}$ si A n'est pas inversible, et $S(A)=\{-4,0,4\}$ sinon.

5. Montrons (i) $\Leftrightarrow$ (ii). On suppose (i). Il existe $(X,Y)\in\Delta^2$ tel que $X^TAY=n^2$.

Comme $|a_{ij}x_iy_j|\leq1$, alors $\forall(i,j)$, $a_{ij}x_iy_j=1$, donc $\forall(i,j)$, $x_iy_j=(a_{ij})^{-1}=a_{ij}$, d'où $A=XY^T$.

Réciproquement, si $A=XY^T$, alors $\forall(i,j)$, $a_{ij}x_iy_j=1$, donc $X^TAY=n^2$.

Montrons (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Supposons $A=XY^T$. alors $\operatorname{rg}A\leq\operatorname{rg}X=1$, et $A\neq O_n$, donc $\operatorname{rg}A=1$.

Réciproquement, supposons $\operatorname{rg}A=1$. Comme les colonnes de A appartiennent à Δ, les A_j sont toutes de la forme y_jA_1, et ainsi $A=X^TY$, avec $X=A_1$.

6. Pour construire de façon bijective une matrice A vérifiant 4), on choisit la première colonne A_1 puis $y_2,...,y_n\in\{-1,1\}$ tels que $A_j=y_jA_1$. Il y a donc 2^{2n-1} matrices de ce type. La proportion est donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)^2}$.

Partie B

7. On a $X^TAY=\sum_{i=1}^n x_iz_i$, avec $z_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j$.

On a $\forall X \in \Delta$, $|\sum_{i=1}^n x_i z_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$, avec égalité lorsque $x_i = 1$ si $z_i \geq 0$, et $x_i = -1$ si $z_i < 0$.

Donc $g_A(Y) = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j\right|$.

8. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Les $a_{ij}Z_j$ sont indépendantes et de loi de Rademacher

Avec $a_{ij}Z_j = 1 - 2U_j$, les U_j sont des variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Donc $\sum_{j=1}^n a_{ij}Z_j = n - 2\sum_{j=1}^n U_j$, et donc $P\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}Z_j = n-2k\right) = 2^{-n}\binom{n}{k}$.

On en déduit par le th du transfert que $E\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\right|\right) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}|n-2k|$

Par linéarité de l'espérance, on a $E(g_A(Z)) = \sum_{i=1}^n E\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\right|\right) = \dfrac{n}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}|n-2k|$.

9.a) Par récurrence sur m. La propriété est vraie pour $m = 0$.

Soit $m \geq 1$. Supposons la propriété vraie au rang $m-1$.

On a $n\binom{n-1}{m-1} + (n-2m)\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1} + n\binom{n}{m} - 2n\binom{n-1}{m-1}$, car $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$.

On obtient donc $n\binom{n}{m} - n\binom{n-1}{m-1} = n\binom{n-1}{m}$ par la relation de Pascal.

9.b) On a $\dfrac{n}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(n-2k) = 0$ car $E\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}Z_j\right) = \sum_{j=1}^n a_{ij}E(Z_j) = 0$, car $E(Z_j) = 0$.

De plus, $|n-2k| \geq 0$ ssi $k \leq m = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$. Donc $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}|n-2k| = 2\sum_{k=0}^m \binom{n}{k}(n-2k)$. On conclut par a).

10.a) Il existe nécessairement $Y \in \Delta$ tel que $g_A(Y) \geq E(g_A(Z))$.

Et il existe $X \in \Delta$ tel que $X^T AY = g_A(Y)$.

Donc il existe $(X,Y) \in \Delta^2$ tel que $X^T AY \geq \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor n/2\rfloor}$. D'où $M(A) \geq \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor n/2\rfloor}$.

10.b) On a $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$.

- Supposons $n = 2p+1$ impair. On a $\binom{n-1}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{2p}{p}$.

Or, $\dfrac{(2p)!}{(p!)^2} \sim \dfrac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}e^{-2p}}{(2\pi p)p^{2p}e^{-2p}} = \dfrac{2^{n-1}}{\sqrt{\pi p}}$. D'où $\dfrac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor n/2\rfloor} \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}n^{3/2}$, car $p \sim \dfrac{n}{2}$.

- Supposons $n = 2p$ pair. On a $\binom{n-1}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{n-1}{p} = \dfrac{(2p-1)!}{p!(p-1)!} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}$.

On est ramené au cas précédent et on obtient le même équivalent car $\dfrac{1}{2^{n-1}}\dfrac{1}{2} \sim \dfrac{1}{2^{2p+1}}$.

Partie C

11.a) On a $\varphi(\lambda) = \ln\left(\dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right) = \ln(\operatorname{ch}\lambda)$. On veut montrer que $\varphi(\lambda) = \ln(\operatorname{ch}\lambda) \leq \dfrac{\lambda^2}{2}$.

Par parité, il suffit de prouver que la propriété est vraie pour tout réel $\lambda \geq 0$.

On a $\varphi'(\lambda) = \dfrac{\operatorname{sh}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda}$ et $\varphi''(\lambda) = 1 - \left(\dfrac{\operatorname{sh}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda}\right)^2 = \dfrac{1}{(\operatorname{ch}\lambda)^2} \leq 1$.

On a $\varphi''(\lambda) \leq 1$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. En intégrant deux fois sur $[0,\lambda]$, on obtient $\forall \lambda \geq 0$, $\varphi(\lambda) \leq \dfrac{\lambda^2}{2}$.

(*remarque* : On peut aussi y reconnaître l'inégalité de Taylor-lagrange).

11.b) Comme $x \longmapsto e^{\lambda x}$ est strictement croissante, $P(S_k \geq t) = P\left(e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t}\right)$.

Par Markov appliquée à la v.a. positive $e^{\lambda S_k}$, on a $P\left(e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t}\right) \leq \dfrac{E(e^{\lambda S_k})}{e^{\lambda t}}$.

D'autre part, $e^{\lambda S_k} = e^{\lambda U_1}...e^{\lambda U_k}$.

Comme ces variables sont mutuellement indépendantes, $E(e^{\lambda S_k}) = E(e^{\lambda U_1})^k = e^{k\varphi(\lambda)}$.

On en déduit bien $P\left(S_k \geq t\right) \leq e^{k\varphi(\lambda)}e^{-\lambda t}$.

11.c) Par a) et b), $P\left(S_k \geq t\right) \leq \exp\left(\dfrac{k\lambda^2}{2} - \lambda t\right)$ pour tout réel $\lambda > 0$.

On prend $\lambda = \dfrac{t}{k}$ qui minimise $\lambda \longmapsto \dfrac{k\lambda^2}{2} - \lambda t$. Donc $P\left(S_k \geq t\right) \leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2k}\right)$.

12. Montrons d'abord que les C_{ij} sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

Pour $\varepsilon_{ij} \in \{-1,1\}$, on a $P(C_{ij} = \varepsilon) = \dfrac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2}$, donc C_{ij} suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

On a $P(\forall(i,j),\, C_{ij} = \varepsilon_{ij}) = \dfrac{1}{2^{n^2}} = \prod_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} P(C_{ij} = \varepsilon_{ij})$, donc les C_{ij} sont indépendantes.

On a $x_iy_jC_{ij} = \pm C_{ij}$, donc est aussi de loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

On a $x_iy_jC_{ij}$ fonction de C_{ij}, donc les $x_iy_jC_{ij}$ sont indépendantes.

13. Soient $X = (x_1, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, ..., y_n)$ deux vecteurs appartenant à $\{-1,1\}^n$.

On a $X^TCY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_jC_{ij}$ somme de n^2 v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

Par l'inégalité de Hoeffding de la question 11), on a $P(X^TCY \geq tn^{3/2}) \leq \exp\left(-\dfrac{(tn^{3/2})^2}{2n^2}\right) = \exp\left(\dfrac{t^2n}{2}\right)$.

Or,

$$\max_{(X,Y)\in\{-1,1\}^n\times\{-1,1\}^n}(X^TCY \geq tn^{3/2}) \subset \bigcup_{(X,Y)\in\{-1,1\}^n\times\{-1,1\}^n}(X^TCY \geq tn^{3/2})$$

Donc par sous-additivité, on a $P(M(C) \geq tn^{3/2}) \leq n^2\exp\left(\dfrac{t^2n}{2}\right) = \exp\left(-\left(\dfrac{t^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right)$.

14.a) Posons $t = (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)$ et $\mu = \left(\dfrac{t^2}{2} - 2\ln 2\right) > 0$.

Par 13), on a $P(M(C) \geq tn^{3/2}) \leq \exp\left(-\mu n\right) < 1$.

Donc il existe $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telle que $M(A) \leq (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}$.

En effet, sinon, on aurait $P(M(C) \geq tn^{3/2}) = 1$.

14.b) Supposons par l'absurde que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $M(A) > 2\sqrt{\ln 2}n^{3/2}$.

Comme $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ est un ensemble fini (non vide), on a $\min_{A\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\}),} M(A) > 2\sqrt{\ln 2}n^{3/2}$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $(2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2} < \min_{A\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\}),} M(A)$.

Ce qui contredit a).