Composition n°5. *Durée 4h00*

Premier problème (*extrait de Mines PC-PSI 2022*)

Remarque : à toutes fins utiles, on rappelle qu'il n'existe pas de logarithme sur $\mathbb{C}$.

Et que la fonction logarithme réelle est bien définie et son DSE sur $]-1,1]$ est au programme !

Partie A

Pour $|z|<1$, on considère $\boxed{L(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}}$. Dans cette partie, z est un nombre complexe tel que $|z|<1$.

1) a) Justifier brièvement que $\varphi : t \longmapsto L(tz)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et calculer $\varphi'(t)$.

b) Montrer que $\phi : t \longmapsto (1-tz)\exp(L(tz))$ est constante sur $[0,1]$ et en déduire

$$\exp(L(z))=\frac{1}{1-z}$$

2) a) Montrer que $|L(z)|\leq -\ln(1-|z|)$.

b) Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} L(z^k)$ converge.

3) En déduire que $\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k}$ existe (qu'on note $\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-z^k}$) et que

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-z^k}=\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}L(z^k)\right)$$

Partie B

Pour n et $N\in\mathbb{N}$, on note $E_N(n)$ l'ensemble des N-uplets d'entiers $(p_1,...,p_N)\in\mathbb{N}^N$ tels que

$$\sum_{k=1}^{N} k\ p_k = n \quad , \quad \text{c'est-à-dire}\ \ p_1+2p_2+3p_3+...+Np_N=n$$

On pose $a_N(n)=\operatorname{card}E_N(n)$. On a en particulier, $a_0(n)=0$ si $n\in\mathbb{N}^*$, et $a_0(0)=1$.

4) a) Soit $N\in\mathbb{N}$.

En utilisant une majoration simple de $a_N(n)$, montrer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_N(n)\ x^n$ est de rayon $R\geq 1$.

b) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_N(n)=\sum_{q=0}^{\lfloor n/N\rfloor} a_{N-1}(n-qN)$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}$. Par a), pour $|x| < 1$, on peut poser

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n)\ x^n$$

Montrer que pour tout $|x| < 1$,

$$f_N(x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - x^k}.$$

Suggestion pour la rédaction : Noter $c(n)$ les coefficients du DSE de $\dfrac{1}{1 - x^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n) x^n$.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $b(n) = a_n(n)$. Justifier que $\lim_{N \to +\infty} a_N(n) = b(n)$.

b) Soit $0 \leq x < 1$. On sait par la partie A qu'il existe

$$g(x) = \lim_{N \to +\infty} f_N(x) = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n)\ x^n \right)$$

Montrer que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$$

Indication : Justifier d'abord que $\forall M \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{M} b(n)\ x^n \leq \lim_{N \to +\infty} f_N(x)$.

Partie C

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

6) a) En utilisant un DSE, montrer que $t \longmapsto \ln(1 - e^{-t})$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t})\ dt = -\frac{\pi^2}{6}$$

b) Pour $0 \leq x < 1$, on pose $\boxed{J(x) = -\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{t \ln x})\ dt}$, c'est-à-dire $J(x) = -\int_0^{+\infty} \ln(1 - x^t)\ dt$.

En utilisant un changement de variable affine, montrer que $J(x) \sim \dfrac{\pi^2}{6(1 - x)}$ lorsque x tend vers 1^-.

7) a) Soit $0 < x < 1$. Par la partie A, on a

$$g(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - x^k} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - x^k) \right).$$

Montrer que $g(x) \leq \exp\left(J(x)\right)$.

b) On sait par la partie B que g est DSE sur $[0, 1[$: on a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{N}$.

En prenant $x_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, déterminer une constante K telle que $\boxed{b_n \leq \exp\left(K\sqrt{n}\right)}$ pour n assez grand.

$\boxed{\textbf{Second problème}}$ (*extrait concours X PC 2018*)

Dans tout le sujet, n est un entier naturel non nul, c'est-à-dire $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ une matrice à coefficients dans $\{-1,1\}$.

On pose $\Delta = \{-1,1\}^n$ et $S(A) = \{X^T AY \mid (X,Y) \in \Delta^2\}$ et $M(A) = \max S(A)$.

Par ailleurs, on suppose donné un espace probabilisé (Ω, P, T) sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires définies dans le sujet.

Les trois parties sont largement indépendantes.

Partie A

1. Préciser le cardinal de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Montrer que $S(A) \subset [\![-n^2, n^2]\!]$ et en utilisant un argument de parité, montrer que l'inclusion est stricte.

3. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. On suppose qu'il existe des matrices diagonales C et D à coefficients diagonaux dans $\{-1,1\}$ telles que $B = CAD$. Montrer que $S(B) = S(A)$.

4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$. On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $S(I)$ et $S(J)$, et en déduire $S(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\{-1,1\})$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) $n^2 \in S(A)$

(ii) il existe X et Y dans Δ tels que $A = XY^T$

(iii) $\operatorname{rg} A = 1$.

6. En déduire la proportion de matrices $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telles que $n^2 \in S(A)$.

Partie B

Pour $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $Y = (y_i)_{1\le i\le n} \in \Delta$, on pose

$$g_A(Y) = \max\{X^T AY \ \mid X \in \Delta\}$$

7. Montrer que $g_A(Y) = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j\right|$.

8. Soit $Z = (Z_1 ..., Z_n)$ une famille de v.a. aléatoires $Z_i : \Omega \to \{-1,1\}$ de loi uniforme et indépendantes.

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, on a

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \ E\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{ij} Z_j\right|\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n-2k|$$

En déduire $E\left(g_A(Z)\right) = \dfrac{n}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n-2k|$.

9.a) Soit $0 \leq m < n$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}(n-2k) = n\binom{n-1}{m}$$

9.b) En déduire que

$$E\left(g_A(Z)\right) = \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{m}, \text{ où } m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

10.a) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, on a $M(A) \geq \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

10.b) En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, montrer que $\dfrac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}n^{3/2}$.

Partie C

11. Soit $(U_1, ..., U_k)$ une suite de k variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$ indépendantes et de loi uniforme.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(\lambda) = \ln(E(\exp(\lambda\, U_1))$.

11.a) Montrer que pour tout réel λ, on a $\varphi(\lambda) \leq \dfrac{\lambda^2}{2}$.

11.b) On pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} U_i$. Montrer que pour tous réels $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$,

$$P\left(S_k \geq t\right) \leq \exp\left(k\varphi(\lambda) - \lambda t\right)$$

11.c) En déduire l'inégalité de Hoeffding : pour tout $t > 0$, on a

$$P\left(U_1 + ... + U_k \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right)$$

On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $C : \Omega \to \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$.

Pour $\omega \in \Omega$, on pose $C(\omega) = (C_{ij}(\omega))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Les C_{ij} sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$.

12. On fixe $X = (x_1, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, ..., y_n)$ deux vecteurs appartenant à $\{-1,1\}^n$.

Montrer que les n^2 variables aléatoires $x_i y_j C_{ij}$ sont indépendantes et de même loi uniforme dans $\{-1,1\}$.

13. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$P(M(C) \geq tn^{3/2}) \leq \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right)$$

14.a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telle que $M(A) \leq (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}$.

14.b) Démontrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telle que $M(A) \leq 2\sqrt{\ln 2}n^{3/2}$.