Composition n°3. Corrigé

Premier problème. Transformation d'Euler et accélération de la convergence

1. On a $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\Delta f)(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(f(k+1)-f(k)) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}f(k+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(k)$.
Donc $\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n(\Delta f)(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(k) + \frac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1)$.

Comme S existe, $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$, le terme de droite converge donc vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n)$.

Donc $\sum(-1)^n(\Delta f)(n)$ converge et $\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\Delta f)(n) = S$.

2. On procède par récurrence sur p.

A chaque étape, on applique 1) à la suite de terme général $(\Delta^p f)(n)$, qui vérifie bien les hypothèses (puisque par hypothèse de récurrence, la série converge).

Donc on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\Delta^p u)_n = \frac{1}{2}(\Delta^p u)_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\Delta^{p+1}u)_n$.

Ce qui permet de déduire la formule au rang $(p+1)$ de la formule au rang p.

3. On applique 1) à la fonction $f(x) = \frac{(-1)^m}{x+m}$, autrement dit à la suite $f(n) = \frac{(-1)^m}{n+m}$.

La suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n)$ converge par le CSSA.

Par 1), on a $\sum_{n=m}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{(-1)}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n g(n)$, où $g(n) = (\Delta f)(n) = \frac{-1}{(n+m)(n+m+1)}$.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n g(n)$ vérifie elle aussi le critère spécial des séries alternées,
donc $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n g(n)\right| \le g(0) \le \frac{1}{m(m+1)}$.

On en déduit que $(-1)^m R_m = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \frac{1}{2m} + O(\frac{1}{m^2})$, d'où le résultat.

4a. On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(p)$:

<< Pour toute fonction $f \in E$, il existe $x \in [0,p]$ tel que $\Delta^p g(0) = g^{(p)}(x)$ >>.

La propriété est immédiate pour $p = 0$ (car $\Delta^0 f(0) = f(0)$), et pour $p = 1$ par le théorème des accroissements finis.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang p.

Posons $g = \Delta f$. On a bien $g \in E'$ et $\Delta^{p+1}f(0) = \Delta^p g(0)$.

On a par hypothèse de récurrence appliquée à g, il existe $x \in [0,p]$ tel que $\Delta^p g(0) = g^{(p)}(x)$.

Comme $g = \Delta f$, alors $g^{(p)}(x) = f^{(p)}(x+1) - f^{(p)}(x)$.

Par le th des accroissements finis appliqué à $f^{(p)}$, il existe $y \in [x, x+1]$ tel que $f^{(p)}(x+1) - f^{(p)}(x) = f^{(p+1)}(y)$.

Comme $x \in [0,p]$, alors $y \in [0, p+1]$. Et on a bien $\Delta^{p+1}f(0) = f^{(p+1)}(y)$, d'où le résultat.

Remarque : En fait, la commutativité de Δ et de l'opérateur de dérivation intervient de façon essentielle :
Autrement dit, on a $(\Delta f)' = f'(x+1) - f'(x) = \Delta(f)'$, et on utilise cette propriété pour évaluer $g^{(p)}(x)$.

4b. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on applique a) à la fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(n+x)$.

On a $\Delta F(x) = f(n+1+x) - f(n+x) = \Delta f(n+x$, et par récurrence immédiate, $\Delta^p F(x) = \Delta^p f(n+x)$.

En effet, F de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\Delta^p F(0) = \Delta^p f(n)$, et $F^{(p)}(x) = f^{(p)}(n+x)$.

Par a), il existe donc $y \in [0,p]$ tel que $\Delta^p f(n) = f^{(p)}(n+y)$, ce qui prouve le résultat, car $x = n+y \in [n, n+p]$.

5a. Avec $u = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\Delta^p u = (\Delta^p f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence immédiate sur $p \in \mathbb{N}$.

Par 4b, pour tout n, il existe $x \in [n, n+p]$ tel que $(\Delta^p u)_n = \Delta^p f(n) = f^{(p)}(x)$, donc $(-1)^p \Delta^p f(n) \geq 0$.

5b. On remarque que $b^n = e^{-\lambda n}$, avec $\lambda = -\ln b < 0$.

Par 5a, il suffit de prouver que les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)^\beta}$ et $g : x \longmapsto e^{-\lambda x}$ sont absolument monotones.

Or, pour tout $x \geq 0$, $(-1)^p f^{(p)}(x) = \dfrac{\beta(\beta+1)...(\beta+p-1)}{(1+x)^{\beta+p}} \geq 0$ et $(-1)^p f^{(p)}(x) = \lambda^p e^{-\lambda x} \geq 0$. D'où le résultat.

Autre preuve : Pour $u_n = b^n$, on peut aussi vérifier directement que $\Delta u = (b-1)u$, donc $\Delta^p u = (-1)^p(1-b)^p u$.

6. *Lemme* : Supposons g de signe constant et bornée. Alors $\sup|\Delta g| \leq \sup|g|$.

En effet, $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$. Comme $g(x+1)$ et $g(x)$ sont de même signe, on a $|\Delta g(x)| \leq \max(|g(x)|, |g(x+1)|)$.

Donc $\sup|\Delta g| \leq \sup|g|$.

Comme ici les $(-1)^p\Delta^p f$ sont complètement monotones, on a $\sup|\Delta^p f| \leq \sup\left|\Delta^{p-1} f\right| ... \leq \sup|f|$.

Comme f est décroissante positive, on a $\sup|f| = f(0)$. D'où le résultat.

7a. La suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$.

Par le critère des séries alternées, $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n)$ existe.

Par 2), $S = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \dfrac{(-1)^k}{2^k}(\Delta^k u)_0\right) + R_p$, avec $R_p = \dfrac{1}{2^p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\Delta^p f(n))$.

La suite $((-1)^p \Delta^p f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(-1)^p\Delta^p f(n)$ vérifie aussi le critère des séries alternées.

Donc $|R_p| \leq \dfrac{1}{2^p}|\Delta^p f(0)|$ (premier terme de la série).

7b. Or, par 6), on a $|\Delta^p f(0)| \leq f(0)$. D'où $\lim_{p\to+\infty} R_p = 0$, ce qui donne le résultat.

Second problème. Sommes de Riemann d'une fonction intégrable

Remarque préliminaire : On a $\dfrac{t}{h} - 1 < \left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor \leq \dfrac{t}{h}$, donc $t - h < \left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor h \leq t$.

Sur chaque intervalle $[nh, (n+1)h[$, on a $\left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor h = nh$. Donc $\int_{nh}^{(n+1)} g_h(t)\, dt = h\ f(nh)$.

Il faut bien comprendre le lien avec la méthode des rectangles (avec un pas de h).

1) Posons $\varphi(t) = (1+t^2)f(t)$. L'application φ est continue

On a $\varphi(t) = O_{+\infty}(1)$. Il existe donc $a \geq 0$ et $M \geq 0$ tels que $\forall t \in [a, +\infty[$, $|\varphi(t)| \leq M$.

φ est continue sur le segment $[0,a]$, donc bornée sur $[0,a]$.

On en déduit que φ est bornée sur $[0, +\infty[$, d'où le résultat.

b) Donc pour tout $t \geq h \geq 0$, on a $|g_h(t)| \leq \dfrac{C}{1+(t-h)^2}$.

Donc $\forall h \in]0,1]$, on a $\forall t \geq 1$, $|g_h(t)| \leq \dfrac{C}{1+(t-1)^2}$.

On peut donc considérer $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{C}{1+(t-1)^2} \text{ si } t \geq 1 \\ C \text{ si } t \in [0,1[\end{cases}$, et φ est bien intégrable.

2) Pour tout $t \geq 0$, $\lim_{h\to 0} \left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor h = t$, et par continuité de f, on a $\lim_{h\to 0} g_h(t) = f(t)$.

La propriété de domination est vérifiée par la fonction φ trouvée au a).

Par ailleurs, les fonctions g_h sont continues par morceaux (constantes sur les intervalles $[nh, (n+1)h[$).

Par le théorème de cv dominée pour un paramètre continu, $\lim_{h\to 0} \int_0^{+\infty} g_h(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$.

Or, $\sum_{n=0}^{N} h\ f(nh) = \int_0^{(N+1)h} g_h(t)\ dt$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} h\ f(nh)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} h\ f(nh) = \int_0^{+\infty} g_h(t)\ dt$.

Remarque et rappel :

Si, au lieu de se placer sur $[0, +\infty[$, on se place sur un segment $[a, b]$, la propriété

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b g_h(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt.$$

est une conséquence directe de la propriété sur les sommes de Riemann (cf méthode des rectangles).

3) a) On a $|f(t)\ \exp(-2i\pi xt)| \leq |f(t)|$ intégrable, d'où l'existence de $\widehat{f}(x)$ et $\left|\widehat{f}(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ dt$.

b) Posons $g(t, x) = f(t)\ \exp(-2i\pi xt)$.

- On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(t, x)$ est continue

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(t, x)| \leq |f(t)|$ intégrable.

Par le théorème de continuité des intégrales paramétrées, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4) a) On a $f(t+n) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $\pm\infty$.

b) La fonction F est 1-périodique.

On a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(F) = \int_0^1 F(t) \exp(-2\pi int)\ dt = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t+k) \exp(-2\pi int)\ dt$.

On a $\int_0^1 |f(t+k)|\ \ \exp(-2\pi int)\ dt \leq \sup_{[k,k+1]} |f| = O_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ lorsque k tend vers $\pm\infty$.

Par le théorème ITT (appliqué aux deux sommes sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}_-^*$), on en déduit :

$c_n(F) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k) \exp(-2\pi int)\ dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k) \exp(-2\pi in(t+k))\ dt$, car $e^{2i\pi nk} = 1$.

D'où $c_n(F) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+k) \exp(-2\pi in(t+k))\ dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-2\pi inu)\ du = \widehat{f}(n)$.

Ainsi, $\sum |c_n(F)|$ converge, $\widehat{f}(n) = O_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. D'où, par le th de Fourier,
$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\ \exp(2\pi int)$.

c) En particulier, $F(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\ e_n(0)$, c'est-à-dire $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)$.

Soit $a > 0$. On applique cette formule à la fonction $f_a(t) = f(at)$.

On a $\widehat{f_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\exp(-2i\pi xt)\ dt = \dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp(-2\pi i\dfrac{x}{a}u)\ dt = \dfrac{1}{a}\widehat{f_a}\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Par c), on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_a}(n) = \dfrac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_a}\left(\dfrac{n}{a}\right)$.

5) a) Par 4), on a pour tout $h > 0$, on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h\ f(na) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\dfrac{n}{h}\right)$.

Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $b > 0$ tels que pour tout $|x| \geq b$, $\left|\widehat{f}(x)\right| \leq \dfrac{M}{x^2}$.

Pour $|h| \leq \dfrac{1}{b}$, on a $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\left|\dfrac{n}{h}\right| \geq \dfrac{1}{|h|} = b$, donc $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\left|\widehat{f}\left(\dfrac{n}{h}\right)\right| \leq \dfrac{M}{(n/h)^2} = \dfrac{M\ h^2}{n^2}$.

Donc $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\dfrac{n}{h}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{M\ h^2}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}\ h^2$, et de même $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(-\dfrac{n}{h}\right)\right| \leq \dfrac{\pi^2}{6}\ h^2$.

On en déduit que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\dfrac{n}{h}\right) = \widehat{f}(0) + O(h^2)$. On conclut par $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$.

b) Comme f est paire, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h\ f(nh) = h\ f(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} h\ f(nh)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} h\ f(nh) = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt - \dfrac{1}{2}h\ f(0) + O(h^2)$. On prend donc $A = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ et $B = -\dfrac{1}{2}\ f(0)$.

<u>Exercice</u>

L'intégrale est impropre en 0^+ en $+\infty$.

En 0^+, on a $\ln(t)\exp(it^2) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, donc $t \longmapsto \ln(t)\exp(it^2)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Il reste donc à prouver l'existence de $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \ln(t)\exp(it^2)\ dt$.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{u}$, qui définit bien une fonction C^1 de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

On obtient $\int_1^x \ln(t)\exp(it^2)\ dt = \int_1^{x^2} \varphi(u)\exp(iu)\ du$, où $\varphi(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\ln(\sqrt{u}) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\ln(u)}{\sqrt{u}}$.

On a $\lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = 0$, donc par IPP, $\int_1^{x^2} \varphi(u)\exp(iu)\ du = -i\int_1^{x^2} \varphi'(u)\exp(iu)\ du$.

Or, $\varphi'(u) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1 - \frac{1}{2}\ln(u)}{u^{3/2}}$. Donc $\varphi'(u)\exp(iu) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{u^{5/4}}\right)$.

Comme $\dfrac{5}{4} > 1$, $u \longmapsto \varphi'(u)\exp(iu)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui permet de conclure.