Composition n°3. Corrigé

Exercice A. Preuve de la formule de Stirling

1) $f'(0) = 0$ résulte de la CN d'extremum local (car 0 maximum et intérieur à $]-1, 1[$).

Variante : si on avait $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) - f(0)$ changerait de signe en 0.

Pour déterminer une limite par un DL, on effectue les calculs avec des $\mathfrak{o}\,(...)$, ici à l'ordre 2 pour $f(x)$.

2) Il s'agit de montrer que φ est minorée par un réel strictement positif sur $[-1, 1]$.

Il faut utiliser le théorème de Weierstrass :

Lorsque $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls, φ se prolonge par continuité sur $[-1, 1]$ en une fonction continue strictement positive, donc sa borne inférieure, qui est atteinte, est strictement positive.

Lorsque $f(1) = 0$, φ admet en 1 la limite $+\infty$.
Dans tous les cas, φ est minorée sur un voisinage $[1 - \varepsilon, 1[$ de 1.
De même si $f(-1) = 0$.

Or, φ est minorée sur tout intervalle $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ par un réel strictement positif.

Donc dans tous les cas, φ est minorée sur $[-1, 1]$ par un réel strictement positif.

On a ainsi $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) \geq a$, donc $f(x) = e^{-\varphi(x)x^2} \leq e^{-ax^2}$.
L'inégalité est valable en $x \in \{-1, 1\}$ par passage à la limite et continuité de f.

3) g_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{n}, \sqrt{n}\}$ et admet des limites à gauche et à droite en $-\sqrt{n}$ et$\sqrt{n}$.
Donc g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Pour illustrer le caractère continue par morceaux, on peut faire un schéma (illustrant notamment le fait que g_n est continue à gauche en $\sqrt{n}$ et admet une limite à droite nulle en $\sqrt{n}$).

Attention : Il ne suffit pas d'invoquer la continuité des restrictions à $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, $]\sqrt{n}, +\infty[$ et $]-\infty, -\sqrt{n}[$.

Pour calculer $\lim_{n\to+\infty} g_n(u)$, il faut absolument fixer u et noter que pour n assez grand, $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$.
On a donc, pour n assez grand, $g_n(u) = \exp\left(n \ln f(\frac{u}{\sqrt{n}})\right) \to_{n\to+\infty} \exp(-\frac{1}{2}u^2)$ par le DL de φ du 1).

4) On a $\int_{-1}^{+1} f(x)^n \, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} g_n(u) \, du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u) \, du$.
On applique le th de convergence dominée à la suite d'intégrales : $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u) \, du$, et non pas à $\int_{-1}^{+1} f(x)^n \, dx$.

La propriété de domination (uniformément en n) est assurée par 2) :
On a $\forall u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, $|f_n(u)| \leq e^{-au^2/n}$, donc $\forall u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, $|g(u)| \leq e^{-au^2} = \varphi(u)$, avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Il est important de prolonger g_n sur $\mathbb{R}$ (par 0) pour pouvoir appliquer le th de cv dominée.

5) On a $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt = n^{n+1} \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} \, du$. Et par ailleurs, $n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n) = n^{n+1}e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} \, dx$.
Donc le changement de variable $u = x + 1$ permet de conclure.

6) On étudie la fonction $\varphi(x) = 2^x - (x + 1)$. On a $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = (\ln 2)2^x - 1 \geq 0$, car $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$.

On en déduit $\forall x \geq 1$, $\varphi(x) \geq 0$, donc $J_n \leq \int_1^{+\infty} (2^x e^{-x})^n \, dx = \int_1^{+\infty} e^{\lambda nx} \, dx = \dfrac{e^{-\lambda n}}{\lambda n}$, avec $\lambda = (1 - \ln 2)$.

7) Le principe est d'appliquer la partie I à la fonction $f(x) = (x + 1)e^{-x}$, en vérifiant les hypothèses.

On obtient $I_n \sim \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

8) Il suffit de montrer que $I_n + J_n \sim J_n$. Or, par 6), $J_n = O(\frac{1}{n})$ avec $\lambda > 0$, donc a fortiori $\mathfrak{o}\,(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Exercice B. Familles libres de fonctions

1) a) Comme g n'est pas identiquement nulle, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) \neq 0$.

b) Supposons que $\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{pmatrix}$ n'est pas inversible lorsque $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire de déterminant nul.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \dfrac{f(y)}{g(y)}\, g(x)$, donc f est colinéaire à g, ce qui contredit l'hypothèse.

2) a) Considérons l'application $u : F \to \mathbb{R}^n \quad f \longmapsto (f(x_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Comme $(f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est inversible, les vecteurs colonnes $u(f_1), ..., u(f_n)$ forment est une base de $\mathbb{R}^n$.

Donc u est bijective.

Donc l'image de toute base de F est une base de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, $(u(g_1), ..., u(g_n))$ est une base de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la matrice $(g_j(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est inversible.

b) Considérons $(f_1, ..., f_n)$ une base de F.

Comme g_n n'est pas identiquement nulle, il existe x_n tel que $f_n(x_n) \neq 0$.

On considère alors $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $f_j = g_j - \lambda f_n$, où $\lambda_j = \dfrac{f_j(x_n)}{f_n(x_n)}$.

On a $F = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_n) = \mathrm{Vect}(g_1, ..., g_{n-1}, f_n)$ car le fait d'ajouter à un vecteur un multiple d'un autre ne modifie l'espace vectoriel engendré.

Ainsi, $(g_1, ..., g_{n-1}, f_n)$ est une base de F, et on a bien $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $g_j(x_n) = 0$.

c) On va donc prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$\mathcal{P}(n)$: il existe $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\det (f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \neq 0$ pour toute base $(f_1, ..., f_n)$ de F.

Compte tenu de a), il suffit de montrer que la propriété est vraie **pour une base** $(f_1, ..., f_n)$ de E.

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est immédiate et la propriété $\mathcal{P}(2)$ est vraie par la question 1).

Supposons $n \geq 3$ et supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie.

Par b), il existe une base $(f_1, ..., f_n)$ de F et $x_n \in \mathbb{R}$ tels que $f_n(x_n) \neq 0$ et $\forall j < n$, $f_j(x_n) = 0$.

Par hypothèse de récurrence appliquée à $G = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_{n-1})$, il existe $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\det (f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1} \neq 0$$

On a $(f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \left(\begin{array}{c|c} N & * \\ \hline O & f_n(x_n) \end{array}\right)$, où $N = (f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1}$

Par les déterminants par blocs, on obtient donc $\det((f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1}) = f_n(x_n) \times \det N \neq 0$.

Donc la matrice $(f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est inversible.

Exercice C. Convolution

1) a) Par comparaison, les fonctions considérées sont intégrables en $+\infty$ et en $+\infty$, car $O_{+\infty}(1/x^2)$.

- Avec le changement de variable affine $y=-x$, $\int_{-\infty}^{0} xG(x)\ dx = -\int_{0}^{+\infty} xG(x)\ dx$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)\ dx = 0$.

Remarque : On utilise en fait l'imparité de $x \longmapsto xG(x)$.

- Une primitive de $x\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ est $\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

Donc par IPP, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2G(x)\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\ dx = 1$.

Remarque : $\int_{0}^{+\infty} x^p\exp(-x^2/2)\ dx$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction Γ avec le changement de variable bijectif $x=\sqrt{2y}$: on obtient $\sqrt{2}^{p+1}\int_{0}^{+\infty} y^{(p-1)/2}\exp(-y)\ dy = \sqrt{2}^{p+1}\Gamma((p+1)/2)$.

b) On a $G_\lambda(x) = \dfrac{1}{\lambda}G\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\ dy = 1$ avec $x=\lambda y$.

De même, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2G_\lambda(x)\ dx = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} y^2G(y)\ dy = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2G_\lambda(x)\ dx = \lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty} y^2G(y)\ dy = \lambda^2$.

2) a) - On fixe $x\in\mathbb{R}$. On pose $F(t)=f(x-t)p(t)$.

On a F continue et $F(t)=O_{+\infty}(p(t))$ et $F(t)=O_{-\infty}(p(t))$. Comme p est intégrable, F est intégrable.

- Montrons que $(f*p)$ est continue.

Première preuve (par les théorèmes sur les intégrales paramétrées) :

Posons $F(x,t)=f(x-t)p(t)$.

On a : pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x\longmapsto F(x,t)$ est continue

domination : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x,t)\le \|f\|_\infty\ p(t)=\varphi(t)$, et φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Seconde preuve : ici, on peut aussi déduire la continuité de l'uniforme continuité.

Soit $\varepsilon>0$. Par uniforme continuité, il existe $\alpha>0$ tel que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |x-y|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $|x-y|<\alpha$. On a donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $|f(x-t)-f(y-t)|<\varepsilon$.

D'où $|(f*p)(x)-(f*p)(y)|\le\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon p(t)\ dt=\varepsilon$. A fortiori, $(f*p)$ est donc continue en tout point.

b) Posons $F_x(t)=f(x-t)p(t)$. On a $\forall t\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty}F_x(t)=0$ car $\lim_{+\infty}f=0$.

D'autre part, $|F_x(t)|\le\|f\|_\infty\ p(t)=\varphi(t)$, et φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc par convergence dominée (pour un paramètre continu), $\lim_{x\to+\infty}(f*p)(x)=f(x)$.

3) a) On a $(f*p_a)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)p_a(t)\ dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u/a)p(u)\ du$, avec $t=u/a$.

Posons $H_a(u)=f(x-u/a)p(u)$. On a $\forall u\in\mathbb{R}$, $\lim_{a\to+\infty}H_a(u)=f(x)p(u)$ et $|H_a(u)|\le\|f\|_\infty p(u)=\varphi(u)$.

Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a par cv dominée, $\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}H_a(u)\ du=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(u)du=f(x)$.

b) $\int_{|t|<r}p_a(t)\ dt=2\int_{r}^{+\infty}ap(at)\ dt=2\int_{ar}^{+\infty}p(t)\ dt\to 0$ lorsque a tend vers $+\infty$, car on a alors $ar\to+\infty$.

c) On a $\forall x$, $(f*p_a)(x)-f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)-f(x)|\,p_a(t)\ dt$. Posons $M=\|f\|_\infty$.

On fixe $\varepsilon>0$. Il existe $r>0$ tel que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x-y|<r\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

On a $\forall x$, $|(f*p_a)(x)-f(x)|\le\varepsilon\int_{|t|<r}p_a(t)\ dt+M\int_{|t|\ge r}p_a(t)\ dt\le\varepsilon+M\int_{|t|\ge r}p_a(t)\ dt$.

Par b), $M\int_{|t|\ge r}p_a(t)\ dt.\le\varepsilon$ pour a assez grand.

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}}|(f*p_a)(x)-f(x)|\le 2\varepsilon$ pour a assez grand.

Donc $\lim_{a\to+\infty}\sup_{\mathbb{R}}|(f*p_a)-f|=0$, c'est-à-dire $(f*p_a)$ cv uniformément vers f lorsque $a\to+\infty$.

4) a) *Remarque* : T_p est bien définie par 2) : si $f\in E$, alors $(f*p)\in E$. Et T_p est bien linéaire.

On a $|(f*p)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_\infty \; p(t)\; dt = \|f\|_\infty$. Donc $\|T_p(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. La propriété est immédiate pour $n=0$ car $T_p^0(f) = f$.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.

On a $T_p^{n+1}(f) - T_q^{n+1}(f) = T_p^n(T_p(f)) - T_p^n(T_q(f)) + T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_q(f))$.

Or, $T_p^n(T_p(f)) - T_p^n(T_q(f)) = T_p^n(T_p(f) - T_q(f))$.
Par a), $\left\|T_p^n(T_p(f) - T_q(f))\right\|_\infty \leq \|T_p(f) - T_q(f)\|_\infty$ en composant n fois l'inégalité du a).

D'autre part, $T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_p(f)) = T_q(T_p^n(f)) - T_q(T_q^n(f))$ car T_p et T_q commutent.
Donc $\left\|T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_p(f))\right\|_\infty = \left\|T_q(T_p^n(f) - T_q^n(f))\right\| \leq \left\|T_p^n(f) - T_q^n(f)\right\|_\infty$ par a).
Donc $\left\|T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_p(f))\right\|_\infty \leq n\,\|T_p(f) - T_q(f)\|$ par a) et hyp de récurrence.

On déduit de l'inégalité triangulaire que $\left\|T_p^{n+1}(f) - T_q^{n+1}(f)\right\|_\infty \leq (n+1)\,\|T_p(f) - T_q(f)\|$.

Autre preuve : Comme $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$, on a $(T_p)^n - (T_q)^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (T_p)^k (T_q)^{n-1-k}\right) \circ (T_p - T_q)$.
Par a), les $(T_p)^k(T_q)^{n-1-k}$ sont 1-lipschitzienne, donc $\left\|(T_p^{n+1} - T_q^{n+1})(f)\right\|_\infty \leq \|(T_p - T_q)(f)\|_\infty$.

Remarque : $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$ résulte en fait de Fubini (pour les intégrales abs convergentes) :
$(T_p \circ T_q)(f) = \int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} f(x-t-s)p(s)q(t)\right)\; ds\; dt = \int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} f(x-t-s)q(s)p(t)\right)\; dt\; ds = (T_q \circ T_p)(f)$.

5) a) L'intégrabilité résulte de $tp(t) = O_{\pm\infty}(t^3 p(t))$ et $t^2 p(t) = O_{\pm\infty}(t^3 p(t))$.

b) On a $T_{p_n}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\; p_n(t)\; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\; p(u)\; du$.

D'autre part, $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\; p(u)\; du$, $0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\; p(u)\; du$ et $f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)\; u^2 p(u)\; du$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x-t) - f(x) + tf'(x) - \dfrac{1}{2} t^2 f''(x)\right)\; p(t)\; dt$ existe et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f\left(x - \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - f(x) + \frac{u}{\sqrt{n}} f'(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2 f''(x)\right)\; p(u)\; du = T_{p_n}(f)(x) - f(x) + 0 - \frac{1}{2n} f''(x).$$

Or, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\left|f(x+\theta) - f(x) - \theta f'(x) - \dfrac{1}{2}\theta^2 f''(x)\right| \leq \dfrac{|\theta|^3}{6}\left\|f^{(3)}\right\|_\infty$.

D'où, avec $\theta = --\dfrac{u}{\sqrt{n}}$, $\left|f\left(x - \dfrac{u}{\sqrt{n}}\right) - f(x) + \dfrac{u}{\sqrt{n}} f'(x) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^2 f''(x)\right| \leq \dfrac{|u|^3}{6n^{3/2}}\left\|f^{(3)}\right\|_\infty$.

Donc, par l'inégalité triangulaire, $\left|T_{p_n}(f) - f(x) - \dfrac{1}{2n} f''(x)\right| \leq \dfrac{1}{6}\left\|f^{(3)}\right\|_\infty \; \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^3\, p(u)\; du$.

c) Donc par b), $\left\|T_{p_n}(f) - f - \dfrac{1}{2n} f''\right\|_\infty = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. De même, $\left\|T_{q_n}(f) - \dfrac{1}{2n} f''\right\|_\infty = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or, on a : $\|T_{p_n}(f) - T_{q_n}(f)\|_\infty \leq \left\|T_{p_n}(f) - f - \dfrac{1}{2n} f''\right\|_\infty + \left\|f + \dfrac{1}{2n} f'' - T_{q_n}(f)\right\|_\infty$.

Donc $\|T_{p_n}(f) - T_{q_n}(f)\| = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right) + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Par 4), on conclut $\left\|T_{p_n}^n(f) - T_{q_n}^n(f)\right\|_\infty \leq n\,\|T_{p_n}(f) - T_{q_n}(f)\|_\infty = O\left(\dfrac{1}{n^{1/2}}\right)$, d'où le résultat.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence immédiate, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k_{G_{\sqrt{1/n}}} = T_{G_{\sqrt{k/n}}}$ car $\sqrt{\dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{n}} = \sqrt{\dfrac{k+1}{n}}$.
Donc $\left(T_{G_{\sqrt{1/n}}}\right)^n = T_G$, car $G = G_1$.
Par 1), G vérifie les propriétés de a) et on peut donc lui appliquer c) en prenant $q(x) = G(x)$.

On a $q_n = G_{\sqrt{1/n}}$. Donc $T_{q_n}^n(f) = T_G(f)$. Par c), on conclut $\lim_{n\to+\infty} \left\|T_{p_n}^n(f) - T_G(f)\right\|_\infty = 0$.