Composition n°3. *Durée 3 heures*

Exercice A. Preuve de la formule de Stirling (*extrait Mines PC 2017*)

Partie I. Méthode de Laplace

On suppose connue la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$.

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant les quatre hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : $\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ 0 < f(x) < 1$

H4 : Les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à $[0,1[$.

Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(f(x))$$

1) Montrer que $f'(0) = 0$, puis à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

2) Montrer que la fonction φ est minorée sur $]-1,1[$ par un réel strictement positif.

En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) \leq e^{-ax^2}$$

Indication : Distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(u) = \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \text{ si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

3) Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g : u \longmapsto e^{-u^2/2}$.

4) En déduire que $\int_{-1}^{+1} f(x)^n\, dx \sim \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Formule de Stirling

5) On sait que $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

On pose $I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx}\, dx$ et $J_n = \int_1^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx}\, dx$.

Montrer que $n! = n^{n+1} e^{-n}(I_n + J_n)$.

6) Montrer que $\forall x \geq 1,\ x+1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n.

7) En utilisant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.

8) En déduire que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{\textbf{Exercice B. Familles libres de fonctions}}$

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

1) On suppose $\dim F = 2$. Soit (f, g) une base de F

a) Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) \neq 0$.

b) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{pmatrix}$ est inversible.

2) On suppose $\dim F = n \geq 2$. *Les questions a) et b) sont indépendantes.*

a) Soient $(f_1, ..., f_n)$ une base de F et $(x_1, ..., x_n)$ une famille de réels.

On suppose que la matrice $(f_j(x_i))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ est inversible.

Montrer que pour *toute* base $(g_1, ..., g_n)$ de F, la matrice $(g_j(x_i))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ est inversible.

b) Montrer qu'il existe une base $(f_1, ..., f_n)$ de F et un réel x_n tels que

$$f_n(x_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n-1\},\ f_j(x_n) = 0$$

c) Montrer qu'il existe une famille de réels $(x_1, ..., x_n)$ telle que pour toute base $(f_1, ..., f_n)$ de F, la matrice $(f_j(x_i))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ est inversible.

Indication : Raisonner par récurrence sur n et utiliser b).

$\boxed{\textbf{Exercice C. Convolution}}$ (*inspiré Mines PC 2010*)

1) On considère $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, dx = 1$.

a) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)\, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G(x)\, dx$.

b) Pour $\lambda > 0$, on pose $G_\lambda(x) = \dfrac{1}{\lambda} G\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\lambda^2}\right)$.

Calculer les trois intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x)\, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} xG_\lambda(x)\, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G_\lambda(x)\, dx$.

Pour la suite de l'exercice, on utilise les notations suivantes :

- On note L l'ensemble des fonctions continues positives $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, dt = 1$.

- On note E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On sait que toute fonction $f \in E$ est bornée et on pose $\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|}$.

On admet que toute fonction $f \in E$ vérifie la propriété d'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

2) Pour $f \in E$ et $p \in L$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{(f * p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\ p(t)\ dt}$.

a) Justifier l'existence de $(f * p)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la continuité de $(f * p)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} (f * p)(x) = .0$.

Remarque : On montre de même (*admis ici*) que $\lim_{x\to-\infty} (f * p)(x) = .0$.

3) On considère $f \in E$ et $p \in L$. On pose $\forall a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_a(t) = ap(at)$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{a\to+\infty} (f * p_a)(x) = f(x)$.

b) Soit $r > 0$. Montrer que $\int_{|t|\geq r} p_a(t)\, dt$ converge vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $(f * p_a)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ lorsque a tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - (f * p_a)(x)| = 0 \quad , \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{a\to+\infty} \|f - (f * p_a)\|_\infty = 0$$

4) Pour $p \in L$, on considère l'endomorphisme $T_p : E \to E \quad f \longmapsto f * p$.

On admet que $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$ pour toutes fonctions p et $q \in L$.

On note T_p^n l'endomorphisme obtenu en composant n fois l'endomorphisme T_p.

a) Montrer que $\forall f \in E$, $\|T_p(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in E$, $\left\|T_p^n(f) - T_q^n(f)\right\|_\infty \leq n \|T_p(f) - T_q(f)\|_\infty$.

5) Soit $\boxed{p \in L}$. On suppose que la fonction $t \longmapsto t^3 p(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $t \longmapsto tp(t)$ et $t \longmapsto t^2 p(t)$ sont intégrables.

Pour la suite du sujet : On suppose qu'on a de plus $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} tp(t)\ dt = 0}$ et $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 p(t)\ dt = 1}$.

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que toutes les dérivées $f^{(k)}$ appartiennent à E.

b) On pose désormais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n(t) = \sqrt{n} p(\sqrt{n} t)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$T_{p_n}(f)(x) - f(x) - \frac{1}{2n} f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f\left(x - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - f(x) + \frac{t}{\sqrt{n}} f'(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 f''(x) \right)\ p(t)\ dt.$$

En déduire que $\left\| T_{p_n}(f) - f - \dfrac{1}{2n} f'' \right\|_\infty \leq \dfrac{1}{6n^{3/2}}\ \left\| f^{(3)} \right\|_\infty\ \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^3\, p(t)\ dt.$

c) Soit $q \in L$ vérifiant les mêmes propriétés que p (qui sont définies au a)). Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| T_{p_n}^n(f) - T_{q_n}^n(f) \right\|_\infty = 0$$

d) Avec les notations de 1), on admet que pour tous λ et $\mu > 0$, on a

$$T_{G_\lambda} \circ T_{G_\mu} = T_{G_\gamma}\ ,\ \text{où } \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| T_{p_n}^n(f) - T_G(f) \right\|_\infty = 0$$

Remarque culturelle : Cette propriété est liée au th central limite (convergence vers une Gaussienne).