Composition n°3. *Le sujet comporte deux problèmes et un petit exercice. Durée 3 heures*

Premier problème. Transformation d'Euler et accélération de la convergence (*inspiré X MP 2011*)

On note $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.

On définit l'endomorphisme $\Delta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite Δu définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$$

On définit l'endomorphisme Δ^p par $\Delta^0 = \mathrm{Id}$ et $\Delta^{p+1} = \Delta \circ \Delta^p$.

De même, on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

Par abus, on note encore Δ l'endomorphisme $\Delta : E \to E$ qui à toute fonction f associe la fonction Δf définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad (\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

On définit l'endomorphisme Δ^p par $\Delta^0 = \mathrm{Id}$ et $\Delta^{p+1} = \Delta \circ \Delta^p$.

Partie I. Transformation d'Euler

Soit $f \in E$. On suppose qu'il existe $\boxed{S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n)}$, c'est-à-dire $S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k f(k)$.

1. Montrer que

$$S = \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\Delta f)(n)$$

2. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2^k}(\Delta^k f)(0)\right) + \frac{(-1)^p}{2^p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\Delta^p f)(n)$$

3. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $R_m = \sum_{n=m}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+m}}{n+m}$. Montrer que

$$R_m = \frac{(-1)^m}{2m} + O(\frac{1}{m^2})$$

Indication : Appliquer la question 1) à une fonction f judicieusement choisie.

Partie II. Suites et fonctions complètement monotones

On dit que la suite $u \in \mathcal{E}$ est complètement monotone ssi pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(-1)^p(\Delta^p u)$ est positive.

On dit que la fonction $f \in E$ est complètement monotone ssi pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $(-1)^p f^{(p)}$ est positive.

4a. Soit $f \in E$. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [0,p]$ tel que $\Delta^p f(0) = f^{(p)}(x)$.

Indication : Raisonner par récurrence. On pourra utiliser la fonction $g = \Delta f$, c'est-à-dire $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

On énoncera avec précision la propriété prouvée par récurrence.

4b. Soit $f \in E$. Montrer que pour tous n et $p \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [n, n+p]$ tel que $\Delta^p f(n) = f^{(p)}(x)$.

5a. Montrer que si $f \in E$ est complètement monotone, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

5b. Soient $\beta \geq 0$ et $b \in]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\dfrac{1}{(1+n)^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont complètement monotones.

Partie III. Transformation d'Euler appliquée aux suites complètement monotones

Soit $f \in E$ une fonction complètement monotone.

6. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\Delta^p f$ est bornée sur $[0, +\infty[$ et que $\sup |\Delta^p f| \leq f(0)$.

7. On suppose désormais qu'on a de plus $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$.

7a. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{4}\Delta f(0) + ... + \frac{(-1)^{p-1}}{2^p}\Delta^{p-1}f(0) + R_p \text{ , avec } |R_p| \leq \frac{1}{2^p}\,|\Delta^p f(0)|$$

7b. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\;\Delta^p f(0)$$

$\boxed{\textbf{Second problème. Sommes de Riemann d'une fonction intégrable}}$ (*inspiré Mines PC 2019*)

Partie I.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $h > 0$, on note $g_h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g_h(t) = f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)$$

On suppose $f(t) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

1) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\forall t \in [0, +\infty[, \ \ |f(t)| \leq \dfrac{C}{1+t^2}$.

b) Expliciter une fonction φ intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que $\forall h \in]0, 1]$, $\forall t \geq 0$, $|g_h(t)| \leq \varphi(t)$.

2) Montrer que pour $h \in]0, 1]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} h\ f(nh)$ converge et que $\lim_{h\to 0, h>0} \sum_{n=0}^{+\infty} h\ f(nh) = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$.

Partie II. Formule sommatoire de Poisson

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \exp(-2i\pi x t)\ dt$$

On dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ (indexée par $\mathbb{Z}$) converge ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{-n}$ convergent.

On pose alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$.

3) a) Justifier que $\widehat{f}(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et montrer que $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4) On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour $g \in \mathcal{C}$, on pose $\|g\|_\infty = \sup_{[0,1]} |g|$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(g) = \int_0^1 g(t)\ \exp(-2\pi i n t)\ dt$.

On admet le théorème de Fourier :

$$\text{si } \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)| < +\infty, \text{ alors } \forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\ \exp(2\pi i n t)$$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(t) = O_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{f}(x) = O_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$ converge.

On pose $\boxed{F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)}$. **On admet que la fonction F est continue.**

b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\ \exp(2\pi i n t)$.

c) Montrer que pour tout réel $a > 0$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right)$$

5) *Application : estimation de l'erreur dans la méthode des rectangles sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $[0,+\infty[$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(t) = O_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{f}(x) = O_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

a) Montrer que lorsque h tend vers 0^+, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h\ f(nh) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt\right) + O(h^2)$$

b) On suppose f paire. Déterminer deux nombres complexes A et B tels que lorsque h tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h\ f(nh) = A + Bh + O(h^2)$$

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t)\ \exp(it^2)\ dt$.