Exercice A. Estimation d'une somme

1) On a $R_n(x) = \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{k!} f^{(n+1)}(t)\ dt = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{k!} e^{nt}\ dt$.
On effectue le changement de variable $u = x - t$, c'est-à-dire $t = x - u$. On a $dt = -du$.
D'où $R_n(x) = -\dfrac{n^{n+1}}{n!} \int_x^0 \dfrac{u^n}{k!} e^{n(x-u)}\ du = e^{nx} \dfrac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n\ du$.

2) On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e$.
Donc pour $n \geq p$ assez grand, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq y$, d'où $a_n \leq a_p\ y^{n-p}$, et ainsi $a_n = O(y^n)$.

3) a) $u \longmapsto e^{-u}$ est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Donc $M(x) < M(1) = e^{-1}$.

b) On a $|R_n(x)| \leq e^{nx} \dfrac{n^{n+1}}{n!}\ x\ M(x)^n \leq e^{nx}\ a_n\ M(x)^n$, car $x \leq 1$.
Donc $R_n(x) = e^{nx}\ O_{+\infty}((yM(x))^n$.
Or, on peut trouver $y > e$ tel que $yM(x) < 1$. Il suffit en effet de prendre y tel que $e < y < \dfrac{1}{M(x)}$.
Donc $R_n(x) = e^{nx}\ \mathfrak{o}_{+\infty}(1)$, et ainsi $T_n(x) = e^{nx} + \mathfrak{o}_{+\infty}(e^{nx})$, c'est-à-dire $T_n(x) \sim e^{nx}$.

Exercice B. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

1) En $t = 0$, on a $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{t - \sin t}{t \sin t} \sim \dfrac{-t^3}{6t^2} = \dfrac{-t}{6}$. On prolonge φ par continuité en 0, en posant $\varphi(0) = 0$.
Comme $\varphi(t) = -\dfrac{1}{6}t + \mathfrak{o}\,(t)$, alors $\varphi'(0)$ existe et vaut $-\dfrac{1}{6}$.
On a $\forall t > 0\quad \varphi'(t) = \dfrac{-1}{t^2} + \dfrac{-\cos t}{(\sin t)^2} = \dfrac{1}{(t \sin t)^2}(t^2 \cos t - (\sin t)^2)$.
Or, on a $t^2 \cos t - (\sin t)^2 = t^2(1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathfrak{o}\,(t^2)) - t^2(1 - \frac{1}{6}t^2 + \mathfrak{o}\,(t^2))^2 = -\frac{1}{6}t^4 + \mathfrak{o}\,(t^4)$.
Donc $\lim_{t\to 0} \varphi'(t) = -\dfrac{1}{6}$, et φ est ainsi de classe C^1.

2) Soit $\lambda > 0$. En intégrant par parties, on a $\int_a^b \phi(t)\sin(\lambda t)\,dt = \dfrac{-1}{\lambda}[\phi(t)\cos(\lambda t)]_a^b + \dfrac{1}{\lambda}\int_a^b \phi'(t)\cos(\lambda t)\,dt$.

D'où $\left|\int_a^b \phi(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \dfrac{1}{\lambda}\left(|\phi(a)| + |\phi(b)| + \int_a^b |\phi'(t)|\,dt\right)$. Par pincement, $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \phi(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$.

3) a) La seconde égalité est immédiate : $\sum_{k=-n}^n e^{2ikt} = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{2ikt} + e^{-2ikt}) = 1 + 2\sum_{k=1}^n \cos(2kt)$.

D'autre part, on a

$\sum_{k=-n}^n e^{2ikt} = e^{-2int} \sum_{k=0}^{2n} e^{2ikt} = e^{-i2nt} \dfrac{\exp(2i(2n+1)t) - 1}{\exp(2it) - 1} = \dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$, car $e^{2i\theta} - 1 = 2ie^{i\theta}\sin(\theta)$.

b) En 0^+, on a $h(t) \sim (2n+1)$, donc la fonction h est prolongeable par continuité en 0, et J_n existe.

Par a), $J_n = \int_0^{\pi/2} (1 + 2\sum_{k=1}^n \cos(2kt))dt = \frac{\pi}{2}$, car pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $\int_0^{\pi/2} \cos(2kt)dt = 0$.

4) En 0^+, on a $g(t) \sim (2n+1)$, donc la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0, et I_n existe.

On a $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\ dt$, où φ est la fonction définie au 1).

Comme φ est de classe C^1, alors par 2), on a $\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} I_n$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

5) En effectuant le changement de variable affine $u = (2n+1)t$, on a $I_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \dfrac{\sin u}{u} du$.

Donc $L = \lim_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Problème A. Preuve du théorème de D'Alembert-Gauss

1) a) On a $|P(z)| \geq |z^n| - \left|a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0\right|$.

On a $\forall |z| > 1$, $\left|a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0\right| \leq m(|z|^{n-1} + ... + |z| + 1) \leq m\dfrac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$. Donc $\forall |z| > 1$, $|P(z)| \geq |z|^n - m\dfrac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$.

b) Quitte à diviser P par son coefficient dominant, on se ramène au cas où P est unitaire.

On définit alors m comme au a).

Lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{x^n - 1}{x - 1} \sim x^{n-1}$, donc $x^n - m\dfrac{x^n - 1}{x - 1} = x^n + \mathfrak{o}_{+\infty}(x^n) \sim x^n$.

En particulier, $\lim_{x \to +\infty} x^n - m\dfrac{x^n - 1}{x - 1} = +\infty$.

Donc pour tout $M \geq 0$, il existe $x_0 > 1$ tel que $\forall x > x_0$, $x^n - m\dfrac{x^n - 1}{x - 1} \geq M$.

On déduit de a) que pour tout $|z| > x_0$, $|P(z)| > M$. *Remarque* : On dit que $|P(z)| \to +\infty$ lorsque $|z| \to +\infty$.

2) a) $|u + v|^2 = \left|\rho e^{i\theta} + \rho' e^{i\theta'}\right|^2 = (\rho)^2 + (\rho')^2 + 2\rho\rho' \cos(\theta' - \theta)$. Et $||u| - |v||^2 = (\rho - \rho')^2$.

Donc $|u + v|^2 = ||u| - |v||^2$ ssi $\rho\rho' \cos(\theta' - \theta) = -\rho\rho'$, donc ssi $\cos(\theta' - \theta) = -1$, car $\rho\rho' \neq 0$.

Il y a donc égalité ssi $\theta' - \theta = \pi\ [2\pi]$, c'est-à-dire ssi il existe $\lambda < 0$ tel que $v = \lambda u$.

Remarque : On peut aussi utiliser la relation valable dans tout espace euclidien :

$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle$, où $\langle u, v\rangle = \mathrm{Re}(v\overline{u})$ est le produit scalaire habituel dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Et par Cauchy-Schwarz, $\langle u, v\rangle = -|u|\,|v|$ ssi u et v sont colinéaires de sens opposés.

b) On pose $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ et $a = |a|\, e^{i\alpha}$ et $b = |b|\, e^{i\beta}$. On a $Q(z) = |a|\, e^{i\alpha} + |b|\, \rho^m\ e^{i(n\theta + \beta)}$.

On peut trouver des valeurs de θ pour lesquelles $n\theta + \beta = \pi + \alpha$. On choisit $\rho \in]0, \varepsilon[$ tel que $|b|\, \rho^m \leq |a|$.

On a alors $|Q(z)| = ||a| - |b|\, \rho^m| = |a| - |b|\, \rho^m < |a|$.

3) a) Considérons le polynôme $Q(h) = P(z_0 + h)$.

Le polynôme Q, translaté de P¨, admet le même degré que P, et en particulier n'est pas constant.

Il est donc de la forme $Q(h) = a + bh^m + ...$, avec b non nul.

Autrement dit, il existe un polynôme R tel que $Q(h) = a + bh^m + h^{m+1}R(h)$.

Comme $P(z_0) \neq 0$, alors $a = Q(0) \neq 0$. Et $P(z) = Q(z - z_0) = a + b(z - z_0)^m + (z - z_0)^{m+1}R(z - z_0)$.

b) On pose $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ et $a = |a|\, e^{i\alpha}$ et $b = |b|\, e^{i\beta}$.

On a $P(z) = |a|\, e^{i\alpha} + |b|\, \rho^m\ e^{i(n\theta + \beta)} + \omega$, avec $\omega \leq \rho^{m+1} R(\rho e^{i\theta})$.

On choisit désormais θ comme au 2) b), c'est-à-dire tel que $n\theta + \beta = \alpha + \pi$.

Alors $P(z) = e^{i\alpha}(|a| - |b|\, \rho^m) + \omega$, avec $|\omega| = \rho^{m+1}\left|R(\rho e^{i\theta})\right|$.

L'application $\rho \longmapsto \left|R(\rho e^{i\theta})\right|$ est continue donc bornée au voisinage de 0.

Donc $P(z) = e^{i\alpha}(|a| - |b|\, \rho^m) + \omega$, avec $|\omega| = O(\rho^{m+1})$ lorsque $\rho \to 0^+$.

D'où par l'inégalité triangulaire, $|P(z)| \leq (|a| - |b|\, \rho^m) + O(\rho^{m+1})$ lorsque $\rho \to 0^+$.

Donc $|P(z)| < |a|$ pour ρ assez petit.

4) Supposons $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

Par 1) b), il existe $r \geq 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > r \Longrightarrow |P(z)| > |P(0)|$.

Posons $D = D(0, r)$. Par la propriété admise, il existe $z_0 \in D$ tel que $\forall z \in D$, $|P(z_0)| \leq |P(z)|$.

Autrement dit, $z \longmapsto |P(z)|$ admet un minimum sur D.

A fortiori, $|P(z_0)| \leq |P(0)|$.

On en déduit (en distinguant les cas $z \in D$ et $|z| > r$) que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z_0)| \leq |P(z)|$.

Supposons par l'absurde que P n'admet pas de racine. Alors $P(z_0) \neq 0$.

Donc par 3), il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z)| < |P(z_0)|$. Ce qui contredit $|P(z_0)| \leq |P(z)|$.

Problème B. Étude de la moyennée d'une fonction

I.1) a) On a $F(0) = 0$ et $F' = f$. Donc $\lim_{x\to 0, x>0} g(x) = \lim_{x\to 0, x>0} \dfrac{F(x)}{x} = F'(0) = f(0)$.

Donc g est bien continue en 0.

D'autre part, g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions C^1 (la primitive F est C^1).

On a $f(x) = f(0) + xf'(0) + \mathfrak{o}(x)$, donc $g(x) = xf(0) + \frac{1}{2}x^2 f'(0) + \mathfrak{o}(x^2)$ par intégration du DL

D'où $g(x) = f(0) + \dfrac{1}{2}xf'(0) + \mathfrak{o}(x)$. On en déduit que g est dérivable en 0, et $g'(0) = \frac{1}{2}f'(0)$.

b) On a pour tout $x > 0$, $|g(x)| \leq \dfrac{1}{x} x \sup |f| = \sup |f|$, donc g est bornée, et $\sup |g| \leq \sup |f|$.

c) L'application g est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $g'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt$, du signe de $xf(x) - \int_0^x f(t)dt$.

Or $xf(x) - \int_0^x f(t)dt. = \int_0^x [f(x) - f(t)]\, dt \geq 0$, car $\forall t \in [0, x]$ $f(x) \geq f(t)$. Donc $g'(x) > 0$.

Autre méthode : Avec $t = \theta x$, $g(x) = \int_0^1 f(\theta x)\, d\theta$. Pour $x < y$, $f(\theta x) \leq f(\theta y)$, donc $g(x) \leq g(y)$.

Autre méthode : F est convexe, car $F' = f$ croissante.

Par le cours, la fonction pente $x \longmapsto \dfrac{F(x) - F(0)}{x}$ est croissante.

I.2) a) L'application f périodique de période p est bornée sur $\mathbb{R}$, car bornée sur le segment $[0, p]$.

L'application $\varphi : x \longmapsto \int_x^{x+p} f(t)\, dt = F(x+p) - F(x)$ est dérivable, et $\varphi'(x) = f(x+p) - f(x) = 0$. Donc φ est constante.

En particulier, on a pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) = \varphi(0) = \int_0^p f(t)\, dt$.

b) F est p-périodique ssi $\forall x$, $F(x+p) = F(x)$, donc ssi $\int_0^p f(t)\, dt = 0$ par a).

c) On écrit $f(x) = \mu + \omega(x)$, avec $\mu = \dfrac{1}{p}\int_0^p f$.

Alors ω est p-périodique de moyenne nulle.

Donc sa primitive Ω est p-périodique et a fortiori bornée, donc $F(x) = \mu x + \Omega(x) = \mu x + O_{+\infty}(1)$.

On en déduit que $M(x) = \mu + O_{+\infty}(\dfrac{1}{x})$, et donc a fortiori, $\lim_{x\to+\infty} M(x) = \mu$.

Autre méthode : Soit $x \geq 0$. Posons $n = \left\lfloor \dfrac{x}{p} \right\rfloor$. Posons $K = \int_0^p f(t)\, dt$.

On a $F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kp}^{kp+p} f(t)dt + \int_{kn}^x f(t)dt = nK + r(x)$, où $r(x) = \int_{kn}^x f(t)dt$.

Or, on a $|r(x)| \leq \int_{kn}^x |f(t)|\, dt \leq (x - np) \sup |f| \leq p \sup |f|$, donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{r(x)}{x} = 0$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{x} = \dfrac{1}{p}$, alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{K}{p}$. Donc f est moyennable et $L(f) = \dfrac{1}{p}\int_0^p f(t)dt$.

I.3) Il s'agit du théorème de Cesàro (en continu). Posons $g(x) = f(x) - L = \mathfrak{o}_{+\infty}(1)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a pour $x \geq a$ assez grand, $|g(x)| \leq \varepsilon$. Posons $K = \int_0^a |g(t)\, dt|$.

Donc $\forall x \geq a$, $\left|\int_0^x g(t)\ dt\right| \leq \int_0^a |g(t)\ dt| + \int_a^x |g(t)\ dt| \leq K + \varepsilon x$.

Donc $\forall x \geq a$, $|G(x)| \leq \dfrac{K}{x} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ pour x assez grand. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{G(x)}{x} = L$.

Comme $F(x) = Lx + G(x)$, alors $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = L$.

I.4) En intégrant par parties, on a $F(x) = A(x)\sin(x) - \int_0^x A'(t)\sin(t)dt$.

Par 3) appliqué à A', on a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x A'(t)dt = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}A(x) = 0$.

Toujours par 3), appliqué à $t \longmapsto A'(t)\sin(t)$, on a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x A'(t)\sin(t)dt = 0$.

Donc f est moyennable, et $L(f) = 0$.

I.5) a) Soit $f \in E_1 \cap E_2$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^x f(t)g(t)dt$.

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_0^x f(t)^2dt\right)\left(\int_0^x g(t)^2dt\right)$.

Avec $g = 1$, on obtient $\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq x\left(\int_0^x f(t)^2dt\right)$, d'où $\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)^2dt$.

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient par passage à la limite des inégalités, $L(f)^2 \leq L(f^2)$.

b) L'idée est de considérer une fonction présentant des variations, qui, mises au carré, deviennent beaucoup plus grandes.

Posons $f(t) = A(t)\cos(t)$, avec $A(t) = \sqrt{(1+t)}$. On a $\lim_{t\to+\infty} A'(t) = 0$, donc par 4), f est moyennable.

On a $f(t)^2 = (1+t)\cos^2(t) = \dfrac{1}{2}(1+t)(1+\cos 2t)$, donc $\int_0^x f(t)^2dt = ... = \dfrac{1}{4}x^2 + O_{+\infty}(x)$.

Donc $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)^2dt = \dfrac{1}{4}x + O_{+\infty}(1)$. Donc f^2 n'est pas moyennable.

I.6) Avec $t = e^u$, on a $\int \sin(\ln t)dt = \int e^u\sin(u)du = \mathrm{Im}\int e^{(1+i)u}\ du = \mathrm{Im}(\frac{1}{1+i}e^{(1+i)u}) = \frac{1}{2}e^u(\sin(u) - \cos(u))$.

Posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Pour $x \geq 1$, on a $F(x) = \int_1^x \sin(\ln t)dt = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$.

Pour $x \geq 1$, on a donc $\dfrac{1}{x}F(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$.

On pose $x_n = \exp(2n\pi)$ et $y_n = \exp\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$. On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n}F(x_n) = -\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{y_n}F(y_n)$.

Donc f n'est pas moyennable.

II.1) Soit $g = T(f) \in \mathrm{Im}\, T$. Alors g est C^1 sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - g(x))$.

Comme f et g sont continues en 0 et ont même valeur en 0, alors $f(x) - g(x) = \mathfrak{o}\,(1)$, donc $g'(x) = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Réciproquement, soit $g \in E$ et supposons que g est C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $g'(x) = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On définit f sur $]0, +\infty[$ par $\forall x > 0$, $f(x) = (xg(x))' = xg'(x) + g(x)$ et $f(0) = g(0) = 0$.

On a bien $\forall x > 0$, $\int_0^x f(t)\ dt = xg(x)$ et f est bien continue en 0, car $xg'(x) = \mathfrak{o}\,(1)$.

II.2) On considère g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$.

On a g continue, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et $\forall x > 0$, $g'(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Et $xg'(x)$ ne tend vers pas vers 0 en $+\infty$, car $g'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = -(2n\pi)^2$. Par II.1), $g \notin \mathrm{Im}\, T$.