Complément au cours sur la convergence dominée. Corrigé.

Exercice A. Théorème de convergence dominée pour les séries.

1) a) On a $|a_{n,p}| \leq b_n$, donc $|\lambda_n| \leq b_n$ par passage à la limite des inégalités larges.

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$ convergent absolument par comparaison avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

b) $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n,p} - \lambda_n| = \sum_{n=0}^{N} |a_{n,p} - \lambda_n| + 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n$, car $|a_{n,p} - \lambda_n| \leq 2b_n$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge, il existe N tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n \leq \frac{1}{3}\varepsilon$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \lim_{p\to+\infty} a_{n,p}$, alors par linéarité, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} |a_{n,p} - \lambda_n| = 0$.

Donc il existe q tel que $\forall p \geq q$, $\sum_{n=0}^{N} |a_{n,p} - \lambda_n| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$.

On déduit de b) que $\forall p \geq q$, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\right| \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$.

2) On considère $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n,p} = \left(1 - \dfrac{n}{p}\right)^p$ si $n \leq p$, et 0 si $n \geq p$. Ainsi, $S_p = \sum_{p=1}^{n} a_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n,p}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} a_{n,p} = e^{-n}$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n,p} \leq e^{-n}$.

Comme la série $\sum e^{-n}$ converge, on peut appliquer 1) avec $b_n = e^{-n}$.

On obtient donc $\lim_{p\to+\infty} S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \dfrac{1}{1-e^{-1}} = \dfrac{e}{e-1}$.

3) a) Par définition $E(Y_p) = \sum_{n=1}^{p} nP(Y_p = n)$.

Posons $R_n = P(Y_p > n)$. On a donc $P(Y_p = n) = R_{n-1} - R_n$.

Donc $E(Y_p) = \sum_{n=1}^{p} n(R_{n-1} - R_n) = \sum_{n=1}^{p} nR_{n-1} - \sum_{n=1}^{p} nR_n = \sum_{n=0}^{p-1} (n+1)R_n - \sum_{n=1}^{p} nR_n$.

On obtient donc $E(Y_p) = \sum_{n=0}^{p-1} R_n - pR_p = \sum_{n=0}^{p} R_n$, car $R_p = 0$.

b) Comme les X_k sont indépendants, on a :

$\forall n \in \{0, 1, ..., p\}$, $P(Y_p > n) = P(X_1 > n, X_2 > n, ..., X_p > n) = \prod_{k=1}^{p} P(X_k > n) = \left(1 - \dfrac{n}{p}\right)^p$.

Donc on obtient $E(Y_p) = \sum_{p=0}^{n} \left(1 - \dfrac{n}{p}\right)^p = S_p$.

Remarque : On obtient ainsi $\lim_{p\to+\infty} E(Y_p) = \dfrac{e}{e-1}$.

Ne pas confondre cette situation avec celle où on choisit un nombre *fixe* m de variables $X_1, ..., X_m$ de loi uniforme dans $E_p = \{1, 2, ..., p\}$. Avec $Y = \min(X_1, ..., X_m)$, on peut montrer que $E(Y) \sim \dfrac{p}{m}$ lorsque $p \to +\infty$.

Exercice B

1) Par le th convergence dominée, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$, mais cela ne permet pas de conclure.

En fait, on note que $|f_n| \leq g$ par passage à la limite, et ainsi $|f_n - f| \leq 2g$ intégrable.

Les $|f_n - f|$ sont continues par morceaux et $\forall x \in I$, $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Par le théorème de convergence dominée, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \int_I |f_n - f| = 0$.

2) g est continue par morceaux. Si f est intégrable, g est intégrable, car $|g| \leq |f|$.

a) Supposons g intégrable. Il existe M telle que $|f| \leq M$. Comme $|f| \leq (1+M)|g|$ intégrable, alors$f$ est intégrable.

b) *Contre-exemple* : On considère $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2^n \text{ si } \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \left[n, n+\frac{1}{2^n}\right[, \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon}$$

On a alors $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+2^{-n}} f = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \times 2^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

Mais $\int_0^{+\infty} g(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+2^{-n}} g = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \times \dfrac{2^n}{1+2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = 1$.

Ainsi, g est intégrable mais f n'est pas intégrable.