Complément au cours sur la convergence dominée

Exercice A. Théorème de convergence dominée pour les séries

1) Soit pour tout $p \in \mathbb{N}$, une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p}$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\boxed{\lambda_n = \lim_{p\to+\infty} a_{n,p}}$.

On suppose qu'il existe une série **convergente** $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ à termes positifs telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_{n,p}| \leq b_n$$

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p}$ converge et montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$ converge.

b) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_{n,p} - \lambda_n| + 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n$.

c) En déduire $\boxed{\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n}$.

Remarque :

En fait, il s'agit du **théorème de convergence dominée pour les séries**. Si on admet le théorème de convergence dominée pour les fonctions, la preuve est immédiate : il suffit d'appliquer le théorème admis aux fonctions $f_p : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ en escaliers associées aux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p}$. On a $\lim_{n\to+\infty} f_p = f$, où f est la fonction en escaliers associée à $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$, et la propriété de domination est vérifiée : $|f_p| \leq \varphi$ intégrable, où φla fonction en escaliers associée à $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

2) On considère pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{n=0}^{p} \left(1 - \dfrac{n}{p}\right)^p$. En utilisant 1), déterminer $\lim_{p\to+\infty} S_p$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_1, ..., X_p)$ des variables aléatoires de loi uniforme sur $E_p = \{1, 2, ..., p\}$.

On considère la variable aléatoire $Y_p = \min(X_1, ..., X_p)$.

a) Justifier que $E(Y_p) = \sum_{n=0}^{p} P(Y > n)$.

b) Montrer que $E(Y_p) = S_p$, où S_p est définie au 2).

Exercice B

1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose que :

- la suite (f_n) converge simplement vers f sur I
- il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_I |f_n - f| = 0$.

2) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On pose $g = \dfrac{f}{1 + |f|}$.

a) On suppose f bornée. Montrer que f est intégrable ssi g est intégrable.

b) Montrer que la propriété est fausse si on ne suppose pas f bornée.