Composition n°2. *Durée 3 heures*

$\boxed{\textbf{Exercice A. Estimation d'une somme}}$ (*début du sujet Mines PC 2017*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(x) = e^{nx} - T_n(x)$$

1) $T_n(x)$ est le polynôme de Taylor d'ordre n en 0 de la fonction $f(x) = e^{nx}$.

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, montrer que

$$R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n \, du$$

2) On pose $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!}$.

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. En déduire que $a_n = O_{+\infty}(y^n)$ pour tout réel $\boxed{y > e}$.

Remarque : On ne suppose pas ici connue la formule de Stirling.

3) On suppose $\boxed{0 < x < 1}$. On pose $M(x) = \sup_{u \in [0,x]}(ue^{-u})$.

a) Montrer que $M(x) < e^{-1}$.

b) Montrer que $T_n(x) \sim e^{nx}$ lorsque $n \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{Exercice B. Calcul de l'intégrale de Dirichlet}}$

1) Montrer que la fonction $\varphi : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \;\; t \longmapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ est prolongeable en 0 en une fonction de classe C^1.

2) Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application $\boxed{\text{de classe } C^1}$. Démontrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \phi(t) \sin(\lambda t) \, dt = 0$.

3) a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et un réel t non congru à 0 modulo π. On pose

$$g(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$$

Sans utiliser de récurrence, montrer que $\sum_{k=-n}^{n} \exp(2ikt) = h(t)$.

b) En déduire la valeur de $J_n = \int_0^{\pi/2} h(t) \, dt$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\boxed{I_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \, dt}$. Déduire de ce qui précède que $\lim_{n \to +\infty} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

5) On suppose connue l'existence de $L = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \dfrac{\sin t}{t} \, dt$. Déduire de 4) que $L = \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\textbf{Problème A. Preuve du théorème de d'Alembert-Gauss}}$ (*inspiré écrit X PC 2004*)

1) a) Soit un polynôme unitaire non constant $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

On pose $m = \sup_{0\leq k\leq n-1} |a_k|$. Montrer que pour tout $|z| > 1$, $|P(z)| \geq |z|^n - m\dfrac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$.

b) Soit un polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que pour tout réel $M \geq 0$, il existe un réel $r \geq 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > r \Longrightarrow |P(z)| > M$.

2) a) Soit u et v deux nombres complexes non nuls.

Montrer que $|u + v| = ||u| - |v||$ si et seulement si il existe un réel $\lambda < 0$ tel que $v = \lambda u$.

b) On considère le polynôme particulier $Q(z) = a + b(z - z_0)^m$, avec a et $b \in \mathbb{C}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leq \varepsilon$ et $|Q(z)| < |a|$.

Indication : Utiliser l'écriture trigonométrique de $z - z_0$.

3) ($\bigstar$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe a et $b \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme R tels que

$$P(z) = a + b(z - z_0)^m + (z - z_0)^{m+1}R(z - z_0)$$

b) Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z)| < |P(z_0)|$, c'est-à-dire tel que $|P(z)| < |a|$.

Indication : Poser $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ et choisir θ puis ρ judicieusement.

Remarque : On suppose connu le fait que $\rho \longmapsto \left|R(\rho e^{i\theta})\right|$ est continue au voisinage de 0.

4) ($\bigstar$) On note $D(0, r)$ le disque (fermé) de centre 0 et de rayon r, c'est-à-dire : $\forall z \in \mathbb{C}$, $(z \in D(0, r) \Leftrightarrow |z| \leq r)$.

On *admet* que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout réel positif r, la fonction $f : z \longmapsto |P(z)|$ est *bornée et atteint ses bornes* sur le disque $D = D(0, r)$, donc en particulier il existe $z_0 \in D$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z\in D} |P(z)|$.

Démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : Si $P \in \mathbb{C}[X]$ n'est pas constant, P admet au moins une racine.

Indication : Utiliser notamment la question 1) b) avec une valeur de M bien choisie.

Problème B. Etude de la moyennée d'une fonction

Partie I. Fonctions moyennables (*inspiré de l'écrit de Centrale MP 2005*)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue.

On note F la primitive de f définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

La moyennée de f est l'application $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(0) = f(0) \text{ et } \ \forall x > 0, \ \ g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt = \frac{F(x)}{x}$$

On dit que f est moyennable ssi il existe la limite réelle

$$L(f) = \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

I.1) a) Montrer que g est continue en 0.

Montrer que si f est dérivable en 0, alors g est dérivable en 0, et expliciter $g'(0)$.

b) Montrer que si la fonction f est bornée sur $[0, +\infty[$, alors la fonction g est bornée sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que si f est croissante sur $[0, +\infty[$, alors g est croissante sur $[0, +\infty[$.

I.2) On suppose que f est périodique de période $p > 0$, c'est-à-dire $\forall t \in [0, +\infty[\ \ f(t + p) = f(t)$.

a) Démontrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$.

b) Donner une CNS simple pour que F soit périodique de période p.

c) Montrer que f est moyennable et déterminer $L(f)$.

I.3) On suppose que f converge vers L en $+\infty$. Montrer que f est moyennable et que $L(f) = L$.

I.4) On considère f de la forme $f(t) = A(t)\cos(t)$, où A une application de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}$.

On suppose que l'application A' converge vers 0 en $+\infty$. Montrer que f est moyennable et que $L(f) = 0$.

I.5) On pose $E = C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

On note E_1 l'ensemble des $f \in E$ moyennables, et E_2 l'ensemble des $f \in E$ telles que f^2 est moyennable.

a) Démontrer que si $f \in E_1 \cap E_2$, alors $L(f)^2 \leq L(f^2)$.

b) Donner un exemple de fonction $f \in E_1$ telle que f^2 n'est pas moyennable.

I.6) On considère la fonction $f \in E$ définie par $f(t) = 0$ si $t \in [0, 1]$, et $f(t) = \sin(\ln t)$ si $t \geq 1$.

Démontrer que f n'est pas moyennable.

Partie II. Opérateur de moyennisation (*inspiré Oral Centrale PC*)

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Pour $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $[0, +\infty[$ par

$$T(f)(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty], \;\; T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$$

On note $\operatorname{Im} T$ l'image de T, c'est-à-dire l'ensemble des $T(f)$ lorsque f décrit E.

II.1) Soit $g \in E$. Montrer que $g \in \operatorname{Im} T$ ssi g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0^+$.

II.2) Donner un exemple d'une fonction $g \in E$ de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et telle que $g \notin \operatorname{Im} T$.