Composition n°1. Corrigé

A.1) $G'(x) = F''(x)\sin(x) + F'(x)\cos(x) - F'(x)\cos(x) + F(x)\sin(x) = (F(x) + F''(x))\sin(x)$.

Comme $F(x) + F''(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(2k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(2k+2)}(x) = P(x) + (-1)^n P^{(2n+2)}(x)$,

et que $\deg(P) \leq 2n$, alors $G'(x) = P(x)\sin(x)$. Donc $\int_0^\pi P(x)\sin x = [G(x)\sin x]_0^\pi = F(0) + F(\pi)$.

Remarque : On peut directement obtenir $\int_0^\pi P(x)\sin x = F(0) + F(\pi)$ en intégrant $2n$ fois par parties.

A.2) a) Comme 0 est racine de P de multiplicité n, alors $\forall j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\},\ P^{(j)}(0) = 0$.

Pour j entier compris entre 0 et n, le coefficient en X^{n+j} de P est $a_{j+n} = \frac{1}{n!}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}a^j b^{n-j}$.

Il en résulte que $P^{(n+j)}(0) = (j+n)!\, a_{j+n} = \frac{(n+j)!}{n!}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}a^j b^{n-j} \in \mathbb{Z}$ car $\frac{(n+j)!}{n!} \in \mathbb{N}$.

Donc $F(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

b) On a $P(\pi - X) = \frac{1}{n!}(\frac{a}{b} - X)^n(a - b(\frac{a}{b} - X))^n = P(X)$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}\ \ P^{(k)}(\pi - X) = (-1)^k P^{(k)}(X)$. On en déduit que $F(x) = F(\pi - x)$ et $F(\pi) = F(0) \in \mathbb{Z}$.

c) Par 1), $I_n = \int_0^\pi P(x)\sin x = F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^\pi \sin(x)x^n(a - bx)^n dx$ est l'intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle, donc est strictement positive. On en déduit que $I_n \in \mathbb{N}^*$.

d) On a $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n!}\int_0^\pi \pi^n a^n dx \leq \dfrac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$. On en déduit par pincement que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Ce qui contredit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq 1$ (cf question précédente). Donc π est irrationnel.

B.1) a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = (x+y)^n$ par la formule du binôme.

b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) = xn(x+y)^{n-1}$, et ici $y = 1 - x$.

Autre solution : On utilise $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$: On a $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} = nx$.

c) Mêmes méthodes qu'au b) : soit avec $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, soit avec $x^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}((x+y)^n)$.

d) $\left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2\dfrac{k}{n}x + \dfrac{k(k-1)+k}{n^2}$. Donc $T = x^2 - 2\dfrac{nx}{n}x + \dfrac{n(n-1)x^2}{n^2} + \dfrac{nx}{n^2} = \dfrac{x(1-x)}{n}$.

Remarque : La propriété se déduit directement des propriétés de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

En effet, si X suit la loi binomiale, $E(X) = nx$ et $V(X) = nx(1-x)$.

Donc $\sum_{k=0}^{n}\left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = V\left(\dfrac{X}{n}\right) = \dfrac{V(X)}{n^2} = \dfrac{x(1-x)}{n}$.

B.2) a) On utilise Cauchy-Schwarz appliqué au produit scalaire $\langle a, b\rangle = \sum_{k=0}^{n}\omega_k a_k b_k$, où $\omega_k > 0$.

En prenant $b_k = 1$, on obtient $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\omega_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\omega_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\omega_k\right)$.

On prend ici $a_k = \left|x - \dfrac{k}{n}\right|$ et $\omega_k = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$, on a $\sum_{k=0}^{n}\omega_k = 1$.

(*Remarque* : variante avec $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)^2\left(\sum_{k=0}^{n} y_k^2\right)$, avec $x_k = a_k\sqrt{\omega_k}$ et $y_k = \sqrt{\omega_k}$).

Donc $S(x)^2 \leq \sum_{k=0}^{n}\left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \dfrac{x(x-1)}{n} \leq \dfrac{1}{4n}$ car $x \in [0, 1]$.

D'où $S(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ car $S(x) \geq 0$.

Remarque : En probas**,** l'inégalité résulte de $E(Y) \leq \sqrt{E(Y^2)}$, avec $Y = \left| x - \dfrac{X}{n} \right|$ où X de loi $\mathcal{B}(n,x)$.

b) Supposons f de classe C^1. Posons $M = \sup |f'|$. Par l'inégalité des acc. finis, f est M-lipschitzienne.

On a $f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, car $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.

Or, $\left| f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right) \right| \leq M \left| x - \dfrac{k}{n} \right|$. On en déduit $\sup_{[0,1]} |f - B_n(f)| \leq M \times S(x) = \dfrac{M}{2\sqrt{n}}$.

B.3) Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $\binom{n}{k} \geq n$. En effet, $\binom{n}{k} = n \left(\dfrac{n-1}{k}\right)\left(\dfrac{n-2}{k-1}\right) ... \left(\dfrac{n-k+1}{2}\right) \geq n \times 1 \times ... \times 1 = n$.

D'où $\dfrac{1}{n}\binom{n}{k} \geq 1$ et ainsio $\sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k} \leq \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \dfrac{1}{n}$.

B.4) $(\Rightarrow)$ Supposons (ii).

On a $|f(0) - P_n(0)| \leq \sup_{[0,1]} |f - P_n|$, donc $\lim_{n\to+\infty} P_n(0) = f(0)$. Or, $P_n(0) \in \mathbb{Z}$.

Il suffit donc de prouver que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$, alors $L \in \mathbb{Z}$.

Or, on a $\sin(\pi L) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi u_n) = 0$, donc on a bien $L \in \mathbb{Z}$.

$(\Rightarrow)$ Supposons (i).

On pose $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor f\left(\dfrac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right\rfloor x^k (1-x)^{n-k}$, où $\lfloor\ \rfloor$ est la fonction partie entière.

Pour $k = 0$ ou $k = n$, $\left\lfloor f\left(\dfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k} \right\rfloor = f\left(\dfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k} = 0$.

Pour $1 \leq k \leq n-1$, $\left| \left\lfloor f\left(\dfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k} \right\rfloor - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k} \right| \leq 1$, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq y - \lfloor y \rfloor < 1$.

On en déduit $|Q_n(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}$. Donc par 4), $|Q_n(x) - B_n(f)(x)| \leq \dfrac{1}{n}$.

De plus, $\sup_{[0,1]} |f - Q_n| \leq \sup_{[0,1]} |f - P_n| + \sup_{[0,1]} |P_n - Q_n|$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,1]} |f - Q_n| = 0$.

De plus, Q_n est bien à coefficients entiers, car $\left\lfloor f\left(\dfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k} \right\rfloor$ est un entier. D'où (ii).

C.1) Par l'inégalité triangulaire, $|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k z_k| = \sum_{k=1}^{n} z_k ||$.

C.2) On a $|z| \geq \mathrm{Re}(z)$, donc $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \geq \mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n} z_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cos\theta_k$.

On peut généraliser en prenant $y_k = z_k \exp(-i\theta)$ au lieu de z_k :

On a $|\sum_{k=1}^{n} z_k| = |\sum_{k=1}^{n} y_k| \geq \mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n} y_k) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cos(\theta_k - \theta)$.

C.3) Pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, on a $|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k| \geq \sum_{k=1}^{n} \rho_k \varepsilon_k \cos(\theta_k - \theta)$ en appliquant b) aux $\varepsilon_k z_k$.

On choisit les $\varepsilon_k \in \{-1,1\}$ tels que $\varepsilon_k \cos(\theta_k - \theta) = |\cos(\theta_k - \theta)|$: on prend $\varepsilon_k = 1$ si $\cos(\theta_k - \theta) \geq 0$, et -1 sinon.

Preuves des propriétés admises

On a $\varphi(t) = F(x+T) - F(x)$, où F est une primitive de f. On a F de classe C^1, et $\varphi'(t) = f(x+T) - f(x) = 0$.

Donc $\varphi : x \longmapsto \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ est constante.

Posons $m = \inf_{[0,T]} f$ et $M = \sup_{[0,T]} f$. On a $m \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \leq M$. Et $f([0,T]) = [m,M]$ par TVI et Weierstrass.

Donc il existe $x_0 \in [0,T]$ tel que $f(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$.

C.4) a) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $F : t \longmapsto |\cos(t-\varphi)|$ est continue et π-périodique, et que son graphe est obtenu par translation de celui de $u \longmapsto |\cos(u)|$, alors on obtient par la propriété admise :

$$\int_0^{\pi} |\cos(t-\varphi| \ dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(u)| \ du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) \ du = [\sin(u)]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2$$

D'où $\int_0^{\pi} S_n(t) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \int_0^{\pi} |\cos(\theta_k - t)| \ dt = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \int_0^{\pi} |\cos(t-\theta_k)| \ dt = 2 \sum_{k=1}^{n} \rho_k$.

C.5) La fonction S_n est π-périodique et la valeur moyenne de S_n vaut $\dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S_n(t) \ dt$, c'est-à-dire $\dfrac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \rho_k$.

Comme S_n est continue, par la propriété admise, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $S_n(\theta) = \dfrac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \rho_k$.

Par 2) b), il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k| \geq S_n(\theta) = \dfrac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \rho_k$.

C.6) Posons $n = 2p$. Il est assez naturel de prendre $\varepsilon_k = \begin{cases} +1 \text{ pour } 0 \leq k < p \\ -1 \text{ pour } p \leq k < n \end{cases}$

On sait que la somme des racines n-ième de l'unité est nulle, donc $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.

On en déduit que $\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k z_k\right| = 2\left|\sum_{k=0}^{p-1} e^{2ik\pi/n}\right| = 2\left|\dfrac{\sin(p\pi/n)}{\sin(\pi/n)}\right| = \dfrac{2}{\sin(\pi/n)}$, car $\dfrac{p\pi}{n} = \dfrac{\pi}{2}$.

Comme $0 < \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \leq \dfrac{\pi}{n}$, alors on obtient bien $\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k z_k\right| \geq \dfrac{2n}{\pi} = \dfrac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$.

Question supplémentaire :

Lorsque $n = 2p+1$ est impair, on prend de même $\varepsilon_k = \begin{cases} +1 \text{ pour } 0 \leq k < p \\ -1 \text{ pour } p \leq k < n \end{cases}$

On obtient alors $\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k z_k\right| = 2\left|\sum_{k=0}^{p-1} e^{2ik\pi/n}\right| = 2\left|\dfrac{\sin(p\pi/n)}{\sin(\pi/n)}\right|$.

Or, $\left|\sin\left(\dfrac{p\pi}{n}\right)\right| = \left|\sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right| = \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2n}\right)\right| = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

Donc $\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k z_k\right| = 2\dfrac{\cos(\pi/2n)}{\sin(\pi/n)} = \dfrac{1}{\sin(\pi/2n)} \geq \dfrac{2n}{\pi} = \dfrac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$.