Composition n°1

Exercice A. Une preuve de l'irrationnalité de π

Soient n un entier naturel non nul et P un polynôme à coefficients réels et de degré $2n$.

Rappel : Pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de P. En particulier, $P^{(0)} = P$.

On considère les applications F et G définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} F(x) = P(x) - P''(x) + P^{(4)}(x) - ... + (-1)^n P^{(2n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x) \\ G(x) = F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x) \end{cases}$$

1) Montrer que $G'(x) = P(x)\sin(x)$. En déduire que $\int_0^\pi P(x)\sin(x)\ dx = F(0) + F(\pi)$.

2) On suppose (par l'absurde) que π est un nombre rationnel. On pose $\boxed{\pi = \frac{a}{b}}$, avec $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

On prend dans cette question

$$P(X) = \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$$

a) Montrer que pour tout $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, $P^{(j)}(0) = 0$.

Pour tout $j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, déterminer $P^{(n+j)}(0)$. En déduire que $F(0)$ est un entier relatif.

b) On vérifie aisément (*admis ici*) que $P(\pi - X) = P(X)$. En déduire que $F(\pi)$ est un entier relatif.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi \sin(x)\ x^n (a - bx)^n dx$$

Montrer que I_n est un entier naturel non nul.

d) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0. En déduire que π est irrationnel.

Exercice B. Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass

Première partie

Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$.

1) a) Soient x et $y \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

b) Justifier que $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.

c) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.

d) On pose $T(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Montrer que $T(x) = \dfrac{x(1-x)}{n}$.

2) a) Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

En utilisant 1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $S(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

b) En déduire que si f est de classe C^1, il existe $c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{[0,1]} |f - B_n(f)| \leq \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie (*difficile*)

On admet la propriété suivante : Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,1]} |f - B_n(f)| = 0$.

3) ($\bigstar$) En utilisant 1), montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k} \leq \dfrac{1}{n}$.

4) ($\bigstar\bigstar$) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) $f(0)$ et $f(1) \in \mathbb{Z}$

(ii) il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}[X]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,1]} |f - P_n| = 0$.

Terminologie : On dit que $P \in \mathbb{Z}[X]$ ssi les coefficients de P appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Exercice C. Minoration du module d'une somme

Soient $z_1, z_2, ..., z_n$ des nombres complexes. On pose $\boxed{z_k = \rho_k \exp(i\theta_k)}$, où $\rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$.

1) Démontrer que pour tout $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, on a $\left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

Dans la suite, on veut prouver qu'il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k\right| \geq \dfrac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|$.

2) Démontrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \geq \sum_{k=1}^n \rho_k \cos(\theta_k - \theta)$.

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k\right| \geq \sum_{k=1}^n \rho_k |\cos(\theta_k - \theta)|$.

Pour la suite du problème, on suppose connues les propriétés suivantes **:**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$.

Alors $\varphi : x \longmapsto \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ est constante et il existe $x_0 \in [0,T]$ tel que $f(x_0) = \dfrac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$.

4) On pose $S_n(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k |\cos(\theta_k - t)|$. Calculer $\int_0^\pi S_n(t)\, dt$.

5) Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k\right| \geq \dfrac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|$.

6) On prend ici $z_k = \exp\left(\dfrac{2i\pi k}{n}\right)$, avec $0 \leq k \leq n-1$.

On suppose n pair. Expliciter $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k z_k\right| \geq \dfrac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$.

Question supplémentaire : Traiter le cas n impair.