Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°15   du lundi 03 février au vendredi 07 février

- Normes dans les espaces vectoriels

Normes, distance associée à une norme, boules et sphère unité, distance à une partie non vide

Limite d'une suite, voisinages, continuité, appalications lipschitziennes

Normes usuelles dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) : normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$.

Point adhérent, point intérieur. Fermés, ouverts, une partie est fermée ssi son complémentaire est ouvert.

Une intersection finie (resp. une union arbitraire) d'ouverts est un ouvert ;

Une union finie (resp. une intersection arbitraire) de fermés est un fermé.

L'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) par une fonction continue est un ouvert (resp. fermé).

En dimension finie, les normes sont équivalentes (*admis*) ; utilisation de la norme sup dans une base.

Exemple de normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Compact (= fermé borné) en dimension finie

Tout fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ sur un compact non vide K de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes (*admis*).

Exemple : Distance à une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$.

Espaces de fonctions

Exemples de normes non équivalentes

Exemples d'approximations uniformes (admis) :

- Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escaliers
- Approximation uniforme d'une fonction continue par des polynômes (théorème de Stone-Weierstrass).

Espaces de matrices

- $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (= fermée bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Normes matricielles

S'il existe k tel que $\|u(x)\| \leq k \|x\|$, alors u est lipschitzienne (donc continue ; réciproque hors-programme).

En dimension finie, toute application linéaire est lispchitzienne (donc continue).

Norme subordonnée (notions non exigible comme question de cours) : $|||u||| = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in S} \|u(x)\|$.

Exemples de normes triples de matrices : normes subordonnées à la norme euclidienne ou à la norme sup.

Séries de matrices : Si $\sum \|A_n\|$ converge, alors $\sum A_n$ converge.

Exemple : Si $\| \|$ est une norme d'algèbre dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\|A\| < 1$, alors $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Exemple : Exponentielle de matrice.

- Fonctions vectorielles

(fonctions $X : t \longmapsto X(t)$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ ou dans un evn de dim finie).

Continuité, dérivée (vecteur vitesse), intégrale. Théorème fondamental du calcul différentiel.

Inégalité triangulaire : $\left\| \int_a^b X(t)\ dt \right\| \leq \int_a^b \|X(t)\|\, dt$, inégalité des accroissements finis.

Si L forme linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, alors $L\left(\int_a^b X(t)dt\right) = \int_a^b L(X(t))\ dt$ et $L(X(t))' = L(X'(t))$.

Dérivée de $t \longmapsto B(X(t), Y(t))$ où B bilinéaire. Extension au cas n-linéaire.

Exemple : Dérivée de $t \longmapsto \det(X_1(t), ..., X_n(t))$, avec $X_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

Exemples de fonctions à valeurs complexes.

Remarque : Le théorème du relèvement pour $f : I \to \mathbb{C}^*$ est hors-programme.

- Fonctions de plusieurs variables *à valeurs réelles* : calcul différentiel

On considère ici les fonctions $f : U$ ouvert $\subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}\ \ (x_1, ..., x_p) \longmapsto f(x) = f(x_1, ..., x_p)$ à valeurs réelles.

Continuité (caractérisation séquentielle, pincement). Dérivées partielles (notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ou $\partial_j f$).

Par définition, une application (sur un ouvert) est de classe C^1 ssi les dérivées partielles sont continues.

Toute application de classe C^1 sur U admet un DL_1 en tout point $X_0 \in U$ (*preuve non exigible*) :

Gradient : Si f est de classe C^1, on a $f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \mathfrak{o}(\|h\|)$.

Remarque : La notion d'application différentiable est hors-programme.

Dérivée le long d'un chemin : Dérivée de $t \longmapsto f(x_1(t), ..., x_n(t))$.

Courbe de niveau : Si $\forall t,\ f(\gamma(t)) = 0$, alors $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.

Inégalité des accroissements finis : Si $\|\nabla f(x)\| \leq k$, alors f est k-lipschitzienne (sur un convexe).

Dérivées partielles d'une composée $g(y_1, ..., y_p) = f(x_1(y_1, ..., y_q), x_2(y_1, ..., y_q), ..., x_p(y_1, ..., y_q))$.
Règle de la chaîne.

Dérivées partielles d'ordre supérieur, application de classe C^p (sur un ouvert), théorème de Schwarz (*admis*).

Exemple : Calculs des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de $g : (r, \theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

A venir et **hors-programme de colles** cette semaine :

- Fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles : différentielle et jacobienne.

- Exemples d'équations aux dérivées partielles

- Extremas locaux et globaux d'une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles.