Programme des colles de mathématiques en PC*3

Semaine n°14   du lundi 27 janvier au vendredi 31 janvier

- Suites et séries de fonctions : *révisions*

- Séries entières

Lemme d'Abel. Rayon de convergence d'une série entière : $R = \sup\{\rho \geq 0 \mid (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \}$.

Disque de convergence (cv absolue à l'intérieur, divergence en dehors).

Critère de D'Alembert pour les séries entières.

Cas des séries lacunaires $\sum a_n z^{np+r}$, avec $p \geq 2$.

Propriétés de comparaisons : Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$. Cas $a_n = O(\lambda^n b_n)$, $a_n \sim n^\alpha b_n$.

Rayon de convergence d'une somme, de la série dérivée (formelle), de la primitive (formelle).

Produit de Cauchy de deux séries (resp. séries entières) absolument convergentes.

Convergence normale sur $D(0,r)$, avec $r < R$. Formules de Cauchy.

Séries entières d'une variable réelle. Obtention des dérivées sur l'intervalle ouvert de convergence.

Expression des coefficients en fonction des dérivées de la fonction en 0.

Fonctions développables en série entière au voisinage de 0..

Méthodes d'obtention : Taylor-Lagrange, intégration et dérivation, méthode de l'équation différentielle.

DSE des fonctions usuelles. DSE des fonctions rationnelles.

Exemples d'étude aux bords : cas de $\ln 2$ et de $\arctan 1$.

Utilisation des séries entières dans la résolution d'équations différentielles linéaires. Utilisations des séries entières dans le calcul de sommes, en combinatoire, pour la résolution de récurrences.

- Normes dans les espaces vectoriels

Normes, distance associée à une norme, boules et sphère unité, distance à une partie non vide

Limite d'une suite, voisinages, continuité, appalications lipschitziennes

Normes usuelles dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) : normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$.

Point adhérent, point intérieur. Fermés, ouverts, une partie est fermée ssi son complémentaire est ouvert.

Une intersection finie (resp. une union arbitraire) d'ouverts est un ouvert ;

Une union finie (resp. une intersection arbitraire) de fermés est un fermé.

L'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) par une fonction continue est un ouvert (resp. fermé).

Normes équivalentes.

En dimension finie, les normes sont équivalentes (*admis*) ; utilisation de la norme sup dans une base.

Exemple de normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Compact (= fermé borné) en dimension finie

Tout fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ sur un compact non vide K de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes (*admis*).

Exemple : Distance à une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$.

Espaces de fonctions

Exemples de normes non équivalentes

Exemples d'approximations uniformes (admis) :

- Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escaliers

- Approximation uniforme d'une fonction continue par des polynômes (théorème de Stone-Weierstrass).

Espaces de matrices

- $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (= fermée bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Normes matricielles

S'il existe k tel que $\|u(x)\| \leq k\|x\|$, alors u est lipschitzienne (donc continue ; réciproque hors-programme).

En dimension finie, toute application linéaire est lispchitzienne (donc continue).

Norme subordonnée (notions non exigible comme question de cours) : $|||u||| = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in S} \|u(x)\|$.

Exemples de normes triples de matrices : normes subordonnées à la norme euclidienne ou à la norme sup.

Séries de matrices : Si $\sum \|A_n\|$ converge, alors $\sum A_n$ converge.

Exemple : Si $\| \ \|$ est une norme d'algèbre dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\|A\| < 1$, alors $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Exemple : Exponentielle de matrice.